

熊本大学 2026 年度 数学③

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

正の整数 n に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} n^2 - 1 & (n \text{ が奇数のとき}), \\ \frac{1}{2}n^2 - n & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める。 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(問 1) S_5 と S_6 をそれぞれ求めよ。

(問 2) S_{2n-1} と S_{2n} をそれぞれ n を用いて表せ。

(問 3) $\sum_{\ell=1}^{2n} S_\ell$ を n を用いて表せ。

▶ 解法 1 (奇数項・偶数項を対にする)

【方針】

奇数番目と偶数番目を $2j-1, 2j$ とおいて明示し、1 組ごとの和 $a_{2j-1} + a_{2j}$ を求める。 S_{2n} は組ごとの和の総和、 S_{2n-1} はそこから a_{2n} を引く。最後は $S_{2j-1} + S_{2j}$ を j の多項式にして和の公式を使う。

【解答】

(問 1)

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 24, \quad a_6 = 12$$

である。したがって

$$S_5 = 0 + 0 + 8 + 4 + 24 = 36, \quad S_6 = 36 + 12 = 48$$

である。

(問 2) j を正の整数とすると

$$a_{2j-1} = (2j-1)^2 - 1 = 4j(j-1), \quad a_{2j} = \frac{1}{2}(2j)^2 - 2j = 2j(j-1)$$

である。したがって

$$a_{2j-1} + a_{2j} = 6j(j-1)$$

であるから

$$S_{2n} = \sum_{j=1}^n 6j(j-1) = 6 \left\{ \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j \right\} = 2n(n-1)(n+1)$$

である。また

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} = 2n(n-1)(n+1) - 2n(n-1) = 2n^2(n-1)$$

である。

(問 3) (問 2) より

$$S_{2j-1} + S_{2j} = 2j^2(j-1) + 2j(j-1)(j+1) = 2j(j-1)(2j+1)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{2n} S_\ell &= \sum_{j=1}^n 2j(j-1)(2j+1) \\ &= \sum_{j=1}^n (4j^3 - 2j^2 - 2j) \\ &= n^2(n+1)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+4)}{3}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (問 3: 二重和の順序交換)

【方針】

$S_1 + \cdots + S_{2n}$ の中で各 a_k が何回現れるかを数え、和の順序を交換する。奇数番目と偶数番目を分ければ、一度の多項式和で処理できる。

【解答】

(問 3) a_k は $S_k, S_{k+1}, \dots, S_{2n}$ の $2n - k + 1$ 個に現れるから

$$\sum_{\ell=1}^{2n} S_{\ell} = \sum_{k=1}^{2n} (2n - k + 1) a_k.$$

ここで

$$a_{2j-1} = 4j(j-1), \quad a_{2j} = 2j(j-1)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{2n} S_{\ell} &= \sum_{j=1}^n \{2(n-j+1) \cdot 4j(j-1) + (2n-2j+1) \cdot 2j(j-1)\} \\ &= \sum_{j=1}^n 2j(j-1)(6n-6j+5). \end{aligned}$$

$\sum j, \sum j^2, \sum j^3$ の公式で整理して

$$\sum_{\ell=1}^{2n} S_{\ell} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+4)}{3}$$

を得る。

【総評】 難度 4, 計算量 5, 想定時間 15 分。公式の出題意図は、偶奇で定義された数列を適切にまとめ、基本的な和の公式を使うこと。対ごとに $S_{2j-1} + S_{2j}$ を足す方法と、各 a_k の出現回数を数えて二重和を交換する方法を併記した。 $n = 1, 2, 3$ を直接代入して一般式を検算できる。公式略解の $S_5 = 36, S_6 = 48$ と 3 本の一般式に一致する。

■ 【第 2 問】 ■

m を 2 以上の整数として、毎回 $\frac{1}{m}$ の確率で当たりの出るくじを n 回引く。このとき、1 回も当たりを引かない確率を $p_{m,n}$ とする。以下の問いに答えよ。ただし、

$$0.30102 < \log_{10} 2 < 0.30103, \quad 0.47712 < \log_{10} 3 < 0.47713$$

であることを用いてよい。

(問 1) $p_{m,n}$ を m, n を用いて表せ。

(問 2) $p_{25,n} < 0.1$ となる最小の n を求めよ。

(問 3) $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{m,2m}$ を求めよ。ただし、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$ (自然対数の底) を用いてよい。

▶ 解法 1 (常用対数と定義極限)

【方針】

当たりを引かない確率を 1 回ごとの確率の積で表す。 $m = 25$ では常用対数を取り、 $n \log_{10}(25/24) > 1$ に直して与えられた $\log_{10} 2, \log_{10} 3$ の範囲評価で $n = 56, 57$ を判定する。極限は $(1 - 1/m)^m$ を自然対数の底の定義に帰着させる。

【解答】

(問 1) 1 回のくじで当たりを引かない確率は $1 - \frac{1}{m}$ である。各回は同じ確率で行われるから

$$p_{m,n} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

である。

(問 2)

$$p_{25,n} = \left(\frac{24}{25}\right)^n$$

であるから, $p_{25,n} < 0.1$ は

$$\left(\frac{25}{24}\right)^n > 10$$

と同値である。常用対数をとると

$$n \log_{10} \frac{25}{24} > 1$$

である。ここで

$$\log_{10} \frac{25}{24} = 2 - 5 \log_{10} 2 - \log_{10} 3$$

であるから, 条件より

$$0.01772 < \log_{10} \frac{25}{24} < 0.01778$$

である。したがって

$$57 \cdot 0.01772 = 1.01004 > 1$$

より $n = 57$ は条件を満たす。一方,

$$56 \cdot 0.01778 = 0.99568 < 1$$

より $n = 56$ は条件を満たさない。よって求める最小の n は

$$57$$

である。

(問 3)

$$p_{m,2m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{2m}$$

である。 $k = m - 1$ とおくと

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-m} = \left\{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right\}^{-m/k}$$

である。 $m \rightarrow \infty$ のとき $k \rightarrow \infty$ かつ $m/k \rightarrow 1$ であるから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{e}$$

である。したがって

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{m,2m} = \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e^2}$$

である。

▶ 解法 2 (問 3: 対数のはさみうち)

【方針】

$p_{m,2m}$ の自然対数を取り, $0 < t < 1$ に対する標準不等式 $-t/(1-t) \leq \log(1-t) \leq -t$ を使って極限をはさむ。

【解答】

(問 3) $0 < t < 1$ に対して

$$-\frac{t}{1-t} \leq \log(1-t) \leq -t$$

が成り立つ。これは両辺との差を微分すれば確認できる。 $t = 1/m$ として $2m$ 倍すると

$$-\frac{2m}{m-1} \leq 2m \log\left(1 - \frac{1}{m}\right) \leq -2.$$

左右はともに -2 に収束するから

$$\log p_{m,2m} = 2m \log\left(1 - \frac{1}{m}\right) \rightarrow -2.$$

指数関数の連続性より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{m,2m} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 4, 想定時間 15 分。公式の出題意図は, 独立試行の乗法, 常用対数による最小整数の判定, $(1+1/k)^k$ の極限の運用である。(問 2) では下界で 57 が条件を満たし, 上界で 56 が満たさないことを別々に示すのが要点。(問 3) は定義極限による解法と対数のはさみうちを併記した。数値的にも $(24/25)^{56} > 0.1 > (24/25)^{57}$ で, 公式略解の 57 と e^{-2} に一致する。

【第 3 問】

四面体 $OABC$ について, $OA = OB = 1$, $OC = 3$, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{\pi}{3}$ が成り立つとする。 $\triangle OAB$ を含む平面上に点 C から下ろした垂線の足を D とし, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $AB = x$ とおく。ただし, $0 < x < \sqrt{3}$ とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $\vec{OD}$ を $x, \vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(問 2) 四面体 $OABC$ の体積を x を用いて表せ。

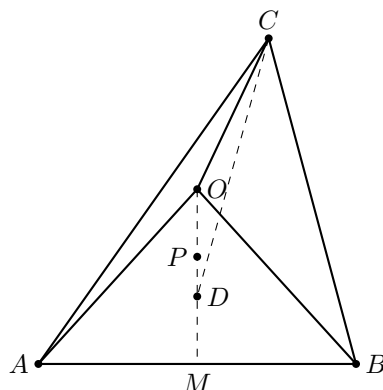
(問 3) $\triangle OAB$ の外接円の中心を P とする。 $DP = \frac{5}{3}$ となるような x の値を求めよ。

▶ 解法 1 (内積と正射影)

【方針】

$\vec{a}, \vec{b}$ の内積を $AB = x$ から求め, $\vec{c}$ との内積条件を使う。垂線の足 D は平面 OAB 上にあり, 条件が対称なので $\vec{OD} = t(\vec{a} + \vec{b})$ とおける。高さ CD は $|\vec{c}|^2 - |\vec{OD}|^2$ から求め, 外心 P も $s(\vec{a} + \vec{b})$ の形にして DP の条件を解く。

【解答】



図は位置関係を示す模式図であり、 M は AB の中点である。対称性から O, P, D, M は同一直線上にある。

(問 1) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ であり、 $AB = x$ だから

$$x^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

である。また $\angle AOC = \angle BOC = \frac{\pi}{3}$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{3}{2}$$

である。

点 D は平面 OAB 上にあり、 $\vec{a}, \vec{b}$ に対して対称であるから

$$\overrightarrow{OD} = t(\vec{a} + \vec{b})$$

とおける。 CD は平面 OAB に垂直なので

$$(\vec{c} - t(\vec{a} + \vec{b})) \cdot \vec{a} = 0$$

である。したがって

$$\frac{3}{2} - t(1 + \vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$$

であり、

$$1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - \frac{x^2}{2} = \frac{4 - x^2}{2}$$

より

$$t = \frac{3}{4 - x^2}$$

である。ゆえに

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4 - x^2}(\vec{a} + \vec{b})$$

である。

(問 2)

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - x^2$$

であるから、(問 1) より

$$OD^2 = \frac{9}{4 - x^2}$$

である。 $OC = 3$ かつ $CD \perp$ 平面 OAB であるから

$$CD^2 = OC^2 - OD^2 = 9 - \frac{9}{4 - x^2} = \frac{9(3 - x^2)}{4 - x^2}$$

である。

一方、 $\triangle OAB$ は $OA = OB = 1$, $AB = x$ の二等辺三角形なので、その面積は

$$\frac{x\sqrt{4 - x^2}}{4}$$

である。したがって四面体 $OABC$ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{x\sqrt{3 - x^2}}{4}$$

である。

(問 3) $\triangle OAB$ の外接円の中心 P も対称性から

$$\overrightarrow{OP} = s(\vec{a} + \vec{b})$$

とおける。 $OP = AP$ より

$$|s(\vec{a} + \vec{b})|^2 = |s(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a}|^2$$

であるから

$$s(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

となる。したがって

$$s \cdot \frac{4 - x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

より

$$s = \frac{1}{4 - x^2}$$

である。

(問 1) より $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4 - x^2}(\vec{a} + \vec{b})$ であるから

$$DP = \left| \frac{2}{4 - x^2}(\vec{a} + \vec{b}) \right| = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

である。これが $\frac{5}{3}$ に等しいので

$$\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{5}{3}$$

である。よって

$$\sqrt{4 - x^2} = \frac{6}{5}, \quad x^2 = \frac{64}{25}$$

となる。 $0 < x < \sqrt{3}$ より

$$x = \frac{8}{5}$$

である。

▶ 解法 2 (問 3：二等辺三角形の対称軸)

【方針】

M を AB の中点とする。二等辺三角形 OAB の対称軸上に P, D があることを使い、 OM, OP, OD を長さだけで求める。

【解答】

(問 3) M を AB の中点とする。 $OA = OB = 1, AB = x$ より

$$OM = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}.$$

外心 P は直線 OM 上にあり、 $OP = AP$ である。直角三角形 AMP に $AM = x/2$, $MP = OM - OP$ を代入すると

$$OP^2 = \frac{x^2}{4} + (OM - OP)^2$$

であるから

$$OP = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

また D も直線 OM 上にある。 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 3/2$ と、 $\overrightarrow{OM}$ が $\vec{a} + \vec{b}$ の方向であることから

$$OD = \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

したがって

$$DP = OD - OP = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

これが $5/3$ なので

$$4 - x^2 = \frac{36}{25}, \quad x^2 = \frac{64}{25}.$$

$x > 0$ より $x = 8/5$ である。

【総評】 難度 6, 計算量 5, 想定時間 20 分。公式の出題意図は, 空間ベクトルの内積, 四面体の体積, 二等辺三角形の三角比・外心を統合すること。正射影と外心がともに $\vec{a} + \vec{b}$ 方向にある対称性を最初に固定すると式が短い。内積解法と二等辺三角形の対称軸による別解を併記し, $DP = 2/\sqrt{4-x^2}$ を相互検算した。公式略解の 3 結果と照合済み。

【第 4 問】

以下の問いに答えよ。ただし, 自然対数の底 e が $2.7 < e < 2.8$ を満たすことを用いてよい。

(問 1) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ の極値を求めよ。

(問 2) n を 3 以上の自然数とする。次の条件

$$a^{nb} > b^{na} > n^{ab} \quad \text{かつ} \quad a < b < n$$

を満たす自然数の組 (a, b) の個数 s_n を求めよ。ただし, 自然数の組 (a, b) が存在しないとき, $s_n = 0$ とする。

(問 3)

(問 2) で求めた s_n に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=5}^n k^2 (s_k + \frac{5}{2}k - 1)$ を求めよ。

▶ 解法 1 (グラフによる整数対の分類)

【方針】

まず $h(x) = \log x/x$ の増減を微分で調べる。条件 $a^{nb} > b^{na} > n^{ab}$ は対数を取り正の数で割ることで $h(a) > h(b) > h(n)$ に変形する。 h は $x > e$ で減少するので, $3 \leq a < b < n$ はすべて数え, $a = 2$ の場合だけ $b = 3, 4$ を除外する。最後は得られた s_k を代入し, k^4 の和の極限を区分求積で評価する。

【解答】

(問 1)

$$y = \frac{\log x}{x}$$

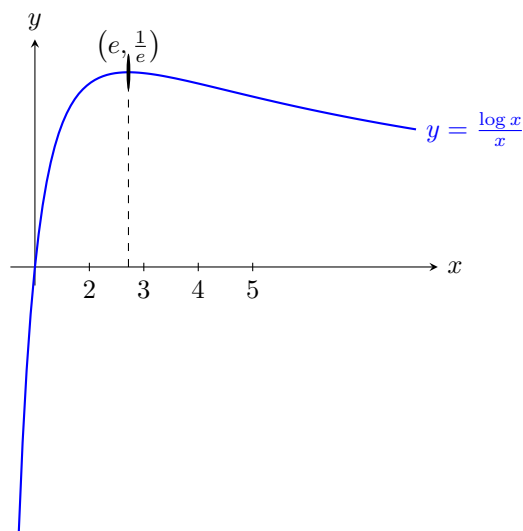
とおくと

$$y' = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

である。したがって $0 < x < e$ で $y' > 0$, $x > e$ で $y' < 0$ である。よって $x = e$ で極大となり, その極大値は

$$\frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$$

である。極小値はない。



(問 2)

$$h(x) = \frac{\log x}{x}$$

とおく。(問 1) より, $h(x)$ は $x > e$ で減少する。

条件

$$a^{nb} > b^{na} > n^{ab}$$

の各辺の自然対数を取り, 正の数 abn で割ると

$$\frac{\log a}{a} > \frac{\log b}{b} > \frac{\log n}{n}$$

すなわち

$$h(a) > h(b) > h(n)$$

である。 $a = 1$ では $h(a) = 0 < h(n)$ となるから不適である。

$2.7 < e < 2.8 < 3$ であるから, $3 \leq a < b < n$ なら $h(a) > h(b) > h(n)$ が成り立つ。したがって, この場合の個数は

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

である。

次に $a = 2$ の場合を考える。 $h(3) > h(2)$ は $\log 9 > \log 8$ から成り立ち, $h(4) = h(2)$ であるから, $b = 3, 4$ は不適である。一方, $b \geq 5$ なら $h(b) \leq h(5) < h(2)$ である。実際, $h(5) < h(2)$ は $\log 25 < \log 32$ から従う。よって $a = 2$ で可能なのは $5 \leq b < n$ のときであり, その個数は $n - 5$ 個である。ただし $n = 5$ のときは 0 個である。

以上より, $n = 3, 4$ では条件を満たす組はなく, $s_n = 0$ である。 $n \geq 5$ では

$$s_n = \frac{(n-3)(n-4)}{2} + (n-5) = \frac{n^2 - 5n + 2}{2}$$

である。

(問 3) $k \geq 5$ では (問 2) より

$$s_k + \frac{5}{2}k - 1 = \frac{k^2 - 5k + 2}{2} + \frac{5}{2}k - 1 = \frac{k^2}{2}$$

である。したがって

$$\frac{1}{n^5} \sum_{k=5}^n k^2 \left(s_k + \frac{5}{2}k - 1 \right) = \frac{1}{2n^5} \sum_{k=5}^n k^4$$

である。区分求積法より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

であり, $k = 1$ から 4 までを除いても極限は変わらない。よって求める極限は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

である。

▶ 解法 2 (問 3 : 4 乗和の公式)

【方針】

(問 2) の式を代入した後, 区分求積ではなく 4 乗和の公式を使い, 最高次項だけを読んで極限を求める。

【解答】

(問 3) $k \geq 5$ では $s_k + \frac{5}{2}k - 1 = \frac{k^2}{2}$ である。したがって, 4 乗和の公式を用いると

$$\frac{1}{2n^5} \sum_{k=5}^n k^4 = \frac{1}{2n^5} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - 354 \right\} \rightarrow \frac{1}{10}.$$

【総評】 難度 7, 計算量 6, 想定時間 25 分。公式の出題意図どおり, $h(x) = \log x/x$ のグラフを整数対の数え上げへ転用する。 $a = 1$ を除外し, $a = 2$ の例外 $b = 3, 4$ を処理するのが要点。 $n = 3, 4, 5$ を直接列挙し, 最後の極限は区分求積と 4 乗和公式の二通りで $1/10$ を確認した。