

# 入 学 試 験 問 題

## 数 学



京 都 大 学 1985 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

実数  $p, q$  ( $q > 0$ ) に対して, 下の 2 条件 (A), (B) を満たす三角形  $ABC$  が存在するための必要十分条件を求めよ.

(A)  $|\overrightarrow{BC}| = q$

(B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = p$

ただし,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  は  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  の内積をあらわす.

## 第 2 問

平面上の 3 点  $A, B, C$  と 1 次変換  $f$  について, 下の 3 条件 (A), (B), (C) を仮定する.

(A)  $A, B, C$  は同一直線上にはなく, また原点  $O$  は三角形  $ABC$  の内部には属さない.

(B) 3 点  $A, B, C$  の  $f$  による像は, 全体として, 3 点  $A, B, C$  に一致する, すなわち

$$\{f(A), f(B), f(C)\} = \{A, B, C\}$$

(C)  $f$  は恒等変換ではない, すなわち  $f \neq E$

このとき, 3 点  $A, B, C$  のうち  $f$  によって動かないものは, 1 つあって, 1 つに限ることを示せ.

### 第 3 問

$b, c$  は実数とし,  $x^2 + 2bx + c = 0$  の 2 根を  $\alpha, \beta$  とする.

(i)  $b^2 - c < 0, b \neq 0$  とすれば, いかなる複素数  $\gamma$  に対しても  $\gamma = t\alpha + u\beta$  となる実数  $t, u$  が存在することを示せ.

(ii)  $f(x) = x^2 + 2(b-1)x + 5 - c$  とおくとき, 次の条件 (\*) を満たす点  $(b, c)$  全体の集合  $D$  を決定し, 図示せよ.

(\*)  $t, u$  がともに実数なら,  $f(t\alpha + u\beta) \neq 0$

## 第 4 問

実数  $r$  ( $r > 0$ ) に対して、下の方程式 (A) の定める球面と、(B) の定める平面の共通部分を  $D$  とする.

$$(A) \ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}(r^2 + 2)$$

$$(B) \ x + y + z = r$$

(i) 点  $P, Q$  がともに  $D$  に属すれば、 $|\overrightarrow{PQ}| \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$  が成立つことを示せ.

(ii)  $r$  が自然数のとき、連立方程式 (A), (B) の整数解を決定せよ.

## 第 5 問

2 枚の硬貨があり，1 枚ずつ投げたとき表の出る確率をそれぞれ  $a, b$  とする．2 枚同時に投げたとき，表の出た硬貨の枚数を  $X$  とする．従って，確率変数  $X$  は値  $0, 1, 2$  をとり，その確率分布は  $a, b$  により定まる．逆に  $X$  の分布を指定したとき，その分布を与えるような  $a, b$  の値が存在するかどうか，また存在する場合には，どれだけあるか，次の 2 つの場合について答えよ．

(i)  $X$  は 2 項分布，すなわち  $P(X = k) = {}_2C_k p^k (1 - p)^{2-k}$  ( $k = 0, 1, 2$ )

ただし  $p$  ( $0 < p < 1$ ) はあらかじめ指定した定数である．

(ii)  $X$  は一様分布，すなわち  $P(X = k) = \frac{1}{3}$  ( $k = 0, 1, 2$ )

## 第 6 問

定数  $a$  ( $a \geq 0$ ) および  $b$  が与えられている.  $x \geq 0$  で定義された関数  $y = f(x)$  で, 下の 2 条件 (A), (B) を満たすものを決定せよ.

(A)  $f(x)$  は  $x \geq 0$  で連続,  $x > 0$  で微分可能

(B)

$$b \int_a^x f(t) dt = xf(x)$$

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)