

京都大学 1985 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数 p, q ($q > 0$) に対して、下の 2 条件 (A), (B) を満たす三角形 ABC が存在するための必要十分条件を求めよ.

(A) $|\overrightarrow{BC}| = q$

(B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = p$

ただし, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積をあらわす.

▶ 解法 1

【方針】

$\overrightarrow{BC}$ を固定し、 $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ とおくと $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{d}$ になる。内積を平方完成して下限を読み取り、等号のときは A が BC の中点になって三角形が退化することまで確認する。逆向きは、下限より大きい値なら垂直方向のずれを選んで非退化な三角形を作る。

【解答】

$\overrightarrow{BC} = \vec{d}$, $|\vec{d}| = q$ とする。点 A から見た B へのベクトルを $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ とおけば、 C は B から $\vec{d}$ だけ進んだ点なので

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{d}$$

である。したがって条件 (B) の左辺は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{d}) \\ &= |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{d} \\ &= \left| \vec{u} + \frac{\vec{d}}{2} \right|^2 - \frac{|\vec{d}|^2}{4} \\ &= \left| \vec{u} + \frac{\vec{d}}{2} \right|^2 - \frac{q^2}{4} \end{aligned}$$

となる。

ここで平方の部分は 0 以上だから、まず $p \geq -\frac{q^2}{4}$ が必要である。ただし等号が成り立つなら $\vec{u} = -\frac{\vec{d}}{2}$ であり、これは A が BC の中点であることを意味する。このとき 3 点 A, B, C は一直線上に並び、三角形にならない。よって実際に必要なのは $p > -\frac{q^2}{4}$ である。

逆に $p > -\frac{q^2}{4}$ とする。このとき $R^2 = p + \frac{q^2}{4} > 0$ とおける。 $\vec{d}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}$ とし、 $\vec{u} = -\frac{\vec{d}}{2} + R\vec{e}$ と取ると、

$\vec{u}$ は $\vec{d}$ と同一直線方向ではないので、対応する 3 点 A, B, C は一直線上に並ばない。また $\left| \vec{u} + \frac{\vec{d}}{2} \right|^2 = R^2 = p + \frac{q^2}{4}$ であるから $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = p$ となる。さらに $|\overrightarrow{BC}| = |\vec{d}| = q$ である。

以上より、求める必要十分条件は $p > -\frac{q^2}{4}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

辺 BC を x 軸上に左右対称に置き、点 A の座標を用いて内積を計算する。非退化条件は A の高さが 0 でないことなので、取り得る p の範囲と十分性が同時に見える。

【解答】

$B = (-q/2, 0)$, $C = (q/2, 0)$ と置く。点 $A = (s, t)$ とすれば、三角形が退化しない条件は $t \neq 0$ である。

このとき

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{q}{2} - s, -t\right), \quad \overrightarrow{AC} = \left(\frac{q}{2} - s, -t\right)$$

だから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(-\frac{q}{2} - s\right) \left(\frac{q}{2} - s\right) + t^2 \\ &= s^2 + t^2 - \frac{q^2}{4}. \end{aligned}$$

$t \neq 0$ より $s^2 + t^2 > 0$ なので、必要条件は

$$p > -\frac{q^2}{4}$$

である。

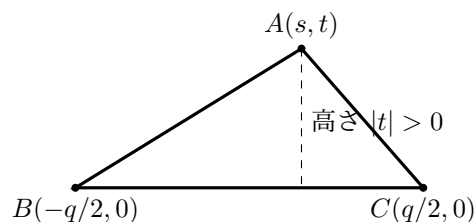
逆にこの不等式が成り立つなら

$$s = 0, \quad t = \sqrt{p + \frac{q^2}{4}}$$

と選べる。この t は 0 でないから三角形は退化せず、内積はちょうど p になる。よって必要十分条件は

$$p > -\frac{q^2}{4}$$

である。



【総評】 難易度は 5, 計算量は 4 程度である。想定時間は 12 分から 18 分程度。平方完成で下限を出すだけなら標準的だが、等号のときに A が BC の中点となり、三角形が退化するため不等号が厳しくなる点が採点上の分かれ目である。十分性では、下限より大きい値を実際に作れることを、 BC に垂直な方向を選ぶなどして説明すると答案として強い。逆向きの構成まで書いて、必要条件だけで終わっていないことを示すのが満点答案の条件になる。

【第 2 問】

平面上の 3 点 A, B, C と 1 次変換 f について、下の 3 条件 (A), (B), (C) を仮定する。

- (A) A, B, C は同一直線上にはなく、また原点 O は三角形 ABC の内部には属さない。
- (B) 3 点 A, B, C の f による像は、全体として、3 点 A, B, C に一致する、すなわち $\{f(A), f(B), f(C)\} = \{A, B, C\}$
- (C) f は恒等変換ではない、すなわち $f \neq E$

このとき、3 点 A, B, C のうち f によって動かないものは、1 つあって、1 つに限ることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

f が 3 点を入れ替える置換を作ることから始める。点ごとに全て止まる場合は $f = E$ になるので除外し、非恒等な置換を「1 点固定の入れ替え」と「3 周期」に分ける。後者では、例えば $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ として $C = sA + tB$ と置き、1 次変換性から $A + B + C = 0$ を導いて原点が重心になる矛盾を作る。

【解答】

条件 (B) より、 f は 3 点 A, B, C を全体として A, B, C に移す。したがって、 A, B, C の上には 1 つの置換が定まる。

もしこの置換が恒等的、すなわち $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C$ であれば、 $f(B - A) = B - A, f(C - A) = C - A$ である。3 点 A, B, C は同一直線上にないので、 $B - A$ と $C - A$ は平面の 2 つの独立な方向を与える。よって f はすべてのベクトルを動かさず、 $f = E$ となる。これは条件 (C) に反する。

したがって、置換としては非恒等である。3 個のものの非恒等な置換は、1 点を固定し、残り 2 点を入れ替える場合 または 3 点を巡回的に入れ替える場合 のどちらかである。前者なら、固定される点は明らかに 1 つだけである。よって、後者が起こらないことを示せばよい。

3 点を巡回的に入れ替える場合を仮定する。必要なら B, C の名前を入れ替えて、 $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A$ としてよい。

まず A と B は同じ直線方向のベクトルではない。もし $B = \lambda A$ なら、1 次変換性から $C = f(B) = f(\lambda A) = \lambda f(A) = \lambda B$ となり、 A, B, C は原点を通る同一直線上に並んでしまうからである。よって A, B を基準にして $C = sA + tB$ と書ける。

この式に f を作用させると $f(C) = sf(A) + tf(B) = sB + tC$ である。一方、巡回の仮定より $f(C) = A$ だから、 $A = sB + t(sA + tB) = tsA + (s + t^2)B$ となる。 A, B は独立なので係数を比べて $ts = 1, s + t^2 = 0$ を得る。後式から $s = -t^2$ であり、これを前式に代入すると $-t^3 = 1$ である。実数 t については $t = -1$ であり、したがって $s = -1$ である。ゆえに $C = -A - B$ すなわち $A + B + C = 0$ が従う。

ところがこれは $O = \frac{A + B + C}{3}$ ということであり、原点 O が三角形 ABC の重心であることを意味する。三角形の重心は内部にあるので、条件 (A) の「原点 O は三角形 ABC の内部には属さない」に反する。

したがって 3 点を巡回的に入れ替える場合は起こらない。残るのは 1 点だけを固定し、残り 2 点を入れ替える場合であるから、3 点 A, B, C のうち f によって動かないものは、1 つあって 1 つに限る。

▶ 解法 2

【方針】

3 点上の置換が 3 周期だと仮定する。すると $f^3 = E$ であり、重心ベクトル $A + B + C$ は f の不動ベクトルになる。非恒等な実 2 次元の 3 周期変換は 0 以外の不動ベクトルをもたないことを基底表示で示し、原点が重心になる矛盾を得る。

【解答】

条件 (B) により f は A, B, C を置換する。3 点をすべて固定すれば、独立な $B - A, C - A$ も固定されて $f = E$ となるので、条件 (C) に反する。したがって可能性は「1 点固定で他の 2 点を交換」または「3 点を巡回」のどちらかである。

後者を仮定する。このとき f^3 は A, B, C をすべて固定するから、同じ理由で

$$f^3 = E$$

である。また

$$f(A + B + C) = A + B + C$$

だから、 $U = A + B + C$ は不動ベクトルである。

ここで $U \neq O$ と仮定し、 U と独立なベクトル V を取る。 $f(U) = U$ なので、この基底で

$$f(V) = cU + dV$$

と書ける。3 回作用させると

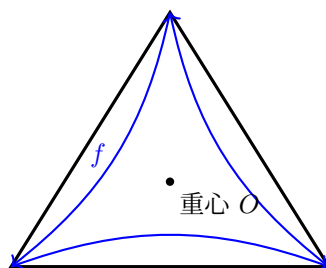
$$f^3(V) = c(1 + d + d^2)U + d^3V = V$$

である。実数 d について $d^3 = 1$ より $d = 1$ 、さらに $3c = 0$ より $c = 0$ となる。よって $f(U) = U$ 、 $f(V) = V$ であり $f = E$ となって矛盾する。

したがって $U = O$ 、すなわち

$$A + B + C = O$$

である。これは原点が三角形 ABC の重心であることを意味し、条件 (A) に反する。ゆえに 3 周期は不可能であり、残る置換は 1 点だけを固定して他の 2 点を交換するものに限る。



3 周期なら原点が内部に入り矛盾

【総評】 難易度は 7、計算量は 5 程度である。想定時間は 25 分から 35 分程度。単に「置換だから」と言うだけでは 3 周期を排除できないため、1 次変換性を使って $A + B + C = 0$ を導く部分が得点の中心になる。恒等的に 3 点を止める場合は $f = E$ になること、重心が内部にあることも省略しない方がよい。巡回の向きは名前を入れ替えればよく、答案では場合分けの入口を明確に書くと読みやすい。

【第 3 問】

b, c は実数とし、 $x^2 + 2bx + c = 0$ の 2 根を α, β とする。

- (i) $b^2 - c < 0, b \neq 0$ とすれば、いかなる複素数 γ に対しても $\gamma = t\alpha + u\beta$ となる実数 t, u が存在することを示せ。
 (ii) $f(x) = x^2 + 2(b-1)x + 5 - c$ とおくと、次の条件 (*) を満たす点 (b, c) 全体の集合 D を決定し、図示せよ。
 (*) t, u がともに実数なら、 $f(t\alpha + u\beta) \neq 0$

▶ 解法 1

【方針】

まず $t\alpha + u\beta$ が実数係数で動ける範囲を分類する。(i) の非実根かつ $b \neq 0$ では実方向と虚方向を別々に調整できる。(ii) では、元の 2 根が実数なら動ける範囲は実軸、非実根で $b \neq 0$ なら全ての複素数、 $b = 0, c > 0$ なら虚軸だけになる。各場合で f の根がその範囲に入るかを判別式や直接代入で調べる。

【解答】

(i) $b^2 - c < 0$ より $d = \sqrt{c - b^2} > 0$ とおくと、2 根は $\alpha = -b + di, \beta = -b - di$ である。

任意の複素数を $\gamma = X + Yi$ と書く。実数 t, u に対して

$$\begin{aligned} t\alpha + u\beta &= t(-b + di) + u(-b - di) \\ &= -b(t + u) + d(t - u)i \end{aligned}$$

である。したがって $-b(t + u) = X, d(t - u) = Y$ を満たすように t, u を選べばよい。 $b \neq 0$ かつ $d > 0$ だから $t + u = -\frac{X}{b}, t - u = \frac{Y}{d}$ を満たす実数 t, u は存在する。実際、

$$t = \frac{1}{2} \left(-\frac{X}{b} + \frac{Y}{d} \right), \quad u = \frac{1}{2} \left(-\frac{X}{b} - \frac{Y}{d} \right)$$

とすればよい。よって任意の複素数 γ は $\gamma = t\alpha + u\beta$ と表される。

(ii) $W = \{t\alpha + u\beta \mid t, u \text{ は実数}\}$ とおく。条件 (*) は、 $f(x) = 0$ の根が W に 1 つも入らないことと同じである。

まず $c \leq b^2$ の場合を考える。このとき α, β は実数である。 $(b, c) \neq (0, 0)$ なら α, β の少なくとも一方は 0 でないので、 W は実数全体である。したがって条件 (*) は、実係数 2 次式 $f(x) = x^2 + 2(b-1)x + 5 - c$ が実数解をもたないことと同値である。その条件は判別式より $\{2(b-1)\}^2 - 4(5 - c) < 0$ すなわち $b^2 - 2b + c - 4 < 0$ である。これは $c < -b^2 + 2b + 4$ と書ける。

なお $(b, c) = (0, 0)$ のときは $\alpha = \beta = 0$ なので $W = \{0\}$ であるが、 $f(0) = 5 \neq 0$ であり、条件 (*) を満たす。この点も後で述べる $b = 0, c \neq 5$ に含まれる。

次に $c > b^2, b \neq 0$ の場合を考える。この場合は (i) により W が複素数全体になる。2 次式 f は複素数の範囲では必ず根をもつので、その根は W に入ってしまう。よって条件 (*) は成り立たない。

最後に $b = 0, c > 0$ の場合を考える。このとき $\alpha = \sqrt{c}i, \beta = -\sqrt{c}i$ であり、 W は虚軸全体である。 $z = yi$ とおくと

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 - 2z + 5 - c \\ &= -y^2 - 2yi + 5 - c \end{aligned}$$

である。これが 0 になるためには虚部から $y = 0$ が必要であり、そのとき実部から $5 - c = 0$ が必要である。したがって、この場合は $c \neq 5$ のとき、かつそのときに限り条件 (*) を満たす。

以上をまとめる。 $b \neq 0$ の部分では $c \leq b^2$ かつ $c < -b^2 + 2b + 4$ である。 $b = 0$ の部分では $c \neq 5$ である。ゆえに求める集合 D は

$$D = \{(b, c) \mid b \neq 0, c \leq b^2, c < -b^2 + 2b + 4\} \cup \{(0, c) \mid c \neq 5\}$$

である。

図示すると、 $b \neq 0$ では放物線 $c = b^2$ の下側または境界と、放物線 $c = -b^2 + 2b + 4$ の下側との共通部分を取る。ただし後者の境界は含まない。さらに $b = 0$ の縦軸上は、点 $(0, 5)$ だけを除いてすべて含める。

▶ 解法 2

【方針】

2 根が張る実係数の集合 W を、実軸・複素平面全体・虚軸・原点の 4 種類に分類する。各場合で f の根が W に入る条件を調べ、境界を 2 本の放物線と $b = 0$ 上の例外として図示する。

【解答】

(i) $d = \sqrt{c - b^2} > 0$ とおけば

$$\alpha = -b + di, \quad \beta = -b - di.$$

任意の $X + Yi$ に対し

$$t + u = -\frac{X}{b}, \quad t - u = \frac{Y}{d}$$

を満たす実数 t, u を取れば $t\alpha + u\beta = X + Yi$ となる。

(ii) $W = \{t\alpha + u\beta \mid t, u \in \mathbb{R}\}$ とする。

$c \leq b^2$ で $(b, c) \neq (0, 0)$ なら $W = \mathbb{R}$ である。このとき条件 (*) は f が実根をもたないこと、すなわち

$$c < -b^2 + 2b + 4$$

と同値である。 $(0, 0)$ も $f(0) = 5 \neq 0$ なので条件を満たす。

$c > b^2$, $b \neq 0$ なら (i) により $W = \mathbb{C}$ である。2 次式 f は複素根をもつため、条件 (*) は成り立たない。

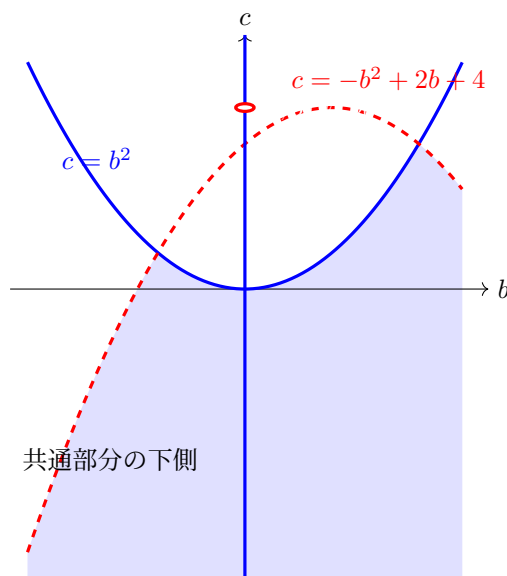
$b = 0, c > 0$ なら $W = i\mathbb{R}$ である。 $z = yi$ を代入すると

$$f(yi) = -y^2 - 2yi + 5 - c$$

だから、これが 0 になるのは $y = 0, c = 5$ のときだけである。

以上より

$$D = \{(b, c) \mid b \neq 0, c \leq b^2, c < -b^2 + 2b + 4\} \cup \{(0, c) \mid c \neq 5\}.$$



【総評】 難易度は 8, 計算量は 7 程度である。想定時間は 35 分から 45 分程度。最重要点は、 $t\alpha + u\beta$ が動く範囲を場合分けしてから f の根の位置を調べることである。 $b \neq 0, c > b^2$ では範囲が複素数全体になり条件が不可能になる一方、 $b = 0, c > 0$ では虚軸だけになるため例外的に多くの点が残る。図示では $b = 0$ の縦軸を通常の放物線領域とは別に扱い、 $(0, 5)$ だけを除くことを忘れやすい。

【第 4 問】

実数 r ($r > 0$) に対して、下の方程式 (A) の定める球面と、(B) の定める平面の共通部分を D とする。

$$(A) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}(r^2 + 2)$$

$$(B) \quad x + y + z = r$$

(i) 点 P, Q がともに D に属すれば、 $|\overrightarrow{PQ}| \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ が成立つことを示せ。

(ii) r が自然数のとき、連立方程式 (A), (B) の整数解を決定せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(i) は球の中心から平面までの距離を出し、交わり D が半径 $\sqrt{2/3}$ の円であることを示す。(ii) は整数解に対して、和と平方和から $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2$ を導く。整数の平方和が 2 になるため、3 数のうち 2 つが等しく残り 1 つが 1 だけ違う形に限られ、和が r であることから r の 3 で割った余りで分類する。

【解答】

(i)

球面 (A) の中心は原点であり、半径の 2 乗は $\frac{r^2 + 2}{3}$ である。一方、平面 (B) $x + y + z = r$ と原点との距離は $\frac{|r|}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$ であるから、その 2 乗は $\frac{r^2}{3}$ である。

したがって、球面と平面の共通部分 D は円であり、その半径の 2 乗は $\frac{r^2 + 2}{3} - \frac{r^2}{3} = \frac{2}{3}$ である。よって D は半径 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ の円である。

円上の 2 点間の距離は直径以下であるから、 $P, Q \in D$ に対して $|\overrightarrow{PQ}| \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ が成り立つ。

(ii)

整数解 (x, y, z) があるとする。条件より $x + y + z = r$, $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 + 2}{3}$ である。ここで恒等式 $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x+y+z)^2$ を用いると、

$$\begin{aligned} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &= 3 \cdot \frac{r^2 + 2}{3} - r^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

左辺は整数の平方の和である。平方の和が 2 になるには、3 つの平方が 1, 1, 0 でなければならない。したがって、 x, y, z のうち 2 つは等しく、残り 1 つはそれらより 1 だけ大きい、1 だけ小さい。

よって整数解は、ある整数 k を用いて $(k, k, k+1)$ の並べ替え、または $(k, k, k-1)$ の並べ替えに限られる。

前者の和は $3k+1$ である。したがって $r \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $k = \frac{r-1}{3}$ となり、解は $\left(\frac{r-1}{3}, \frac{r-1}{3}, \frac{r+2}{3}\right)$ の並べ替えである。

後者の和は $3k-1$ である。したがって $r \equiv 2 \pmod{3}$ のとき $k = \frac{r+1}{3}$ となり、解は $\left(\frac{r+1}{3}, \frac{r+1}{3}, \frac{r-2}{3}\right)$ の並べ替えである。 $r \equiv 0 \pmod{3}$ のときは、上の 2 つの形のどちらの和にもならないので整数解は存在しない。

以上より、整数解は次の通りである。

$$\begin{cases} \left(\frac{r-1}{3}, \frac{r-1}{3}, \frac{r+2}{3}\right) \text{ の並べ替え, } & r \equiv 1 \pmod{3}, \\ \left(\frac{r+1}{3}, \frac{r+1}{3}, \frac{r-2}{3}\right) \text{ の並べ替え, } & r \equiv 2 \pmod{3}, \\ \text{整数解なし,} & r \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

▶ 解法 2

【方針】

平面上の円の中心 $H = (r/3, r/3, r/3)$ を直接求め、各点の H からの距離を計算する。(ii) では和と平方和から差の平方和を作り、整数の平方が $1, 1, 0$ に限られることを利用する。

【解答】

(i) 原点から平面 $x + y + z = r$ へ下ろした垂線の足は

$$H = \left(\frac{r}{3}, \frac{r}{3}, \frac{r}{3} \right)$$

である。 $P = (x, y, z) \in D$ とすると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{HP}|^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2r}{3}(x + y + z) + \frac{r^2}{3} \\ &= \frac{r^2 + 2}{3} - \frac{2r^2}{3} + \frac{r^2}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

よって D は半径 $\sqrt{2/3}$ の円であり、三角不等式から

$$|\overrightarrow{PQ}| \leq |\overrightarrow{PH}| + |\overrightarrow{HQ}| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

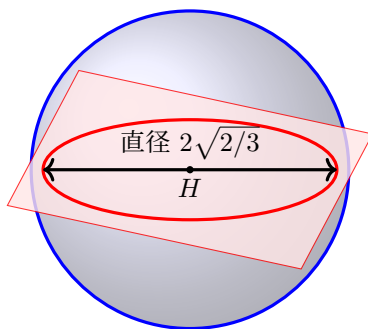
(ii) 整数解なら

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = 2.$$

3 個の整数の平方が $1, 1, 0$ になるので、 (x, y, z) は $(k, k, k + 1)$ または $(k, k, k - 1)$ の並べ替えである。和を r と比較して

$$\begin{cases} \left(\frac{r-1}{3}, \frac{r-1}{3}, \frac{r+2}{3} \right) \text{ の並べ替え, } & r \equiv 1 \pmod{3}, \\ \left(\frac{r+1}{3}, \frac{r+1}{3}, \frac{r-2}{3} \right) \text{ の並べ替え, } & r \equiv 2 \pmod{3}, \\ \text{整数解なし,} & r \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

を得る。



【総評】 難易度は 6，計算量は 5 程度である。想定時間は 20 分から 28 分程度。(i) は交円の半径を出せば直径評価で終わるが、球の半径と平面までの距離を 2 乗で引くところを明確にしたい。(ii) は和と平方和を別々に眺めるより、差の平方和が 2 になる恒等式へまとめるのが決定打である。整数解では 3 で割った余りごとの分類、並べ替えを含めること、 $r \equiv 0 \pmod{3}$ では存在しないことを落とさない。

【第 5 問】

2 枚の硬貨があり、1 枚ずつ投げたとき表の出る確率をそれぞれ a, b とする。2 枚同時に投げたとき、表の出た硬貨の枚数を X とする。従って、確率変数 X は値 $0, 1, 2$ をとり、その確率分布は a, b により定まる。逆に X の分布を指定したとき、その分布を与えるような a, b の値が存在するかどうか、また存在する場合には、どれだけあるか、次の 2 つの場合について答えよ。

(i) X は 2 項分布、すなわち $P(X = k) = {}_2C_k p^k (1-p)^{2-k}$ ($k = 0, 1, 2$)

ただし p ($0 < p < 1$) はあらかじめ指定した定数である。

(ii) X は一様分布、すなわち $P(X = k) = \frac{1}{3}$ ($k = 0, 1, 2$)

▶ 解法 1

【方針】

まず $P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2)$ を a, b で表す。指定分布が存在するなら特に $P(X = 0)$ と $P(X = 2)$ が一致しなければならないので、そこから $a + b$ と ab を決める。(i) は $(a - b)^2 = 0$ となり一意、(ii) は $a + b = 1$ かつ $ab = 1/3$ が $0 \leq a, b \leq 1$ で不可能であることを示す。

【解答】

硬貨はそれぞれ表の出る確率が a, b であるから、当然 $0 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1$ である。

2 枚同時に投げたとき、表の枚数 X の分布は $P(X = 0) = (1-a)(1-b), P(X = 1) = a(1-b) + (1-a)b, P(X = 2) = ab$ である。

(i)

指定された 2 項分布では $P(X = 0) = (1-p)^2, \quad P(X = 2) = p^2$ である。したがって必要条件として $(1-a)(1-b) = (1-p)^2, \quad ab = p^2$ が成り立つ。

第 1 式を展開すると $1 - a - b + ab = 1 - 2p + p^2$ である。ここに $ab = p^2$ を代入すると $a + b = 2p$ を得る。

したがって a, b は、和が $2p$ 、積が p^2 の 2 数である。つまり a, b は $T^2 - 2pT + p^2 = 0$ の 2 根である。この方程式は $(T - p)^2 = 0$ であるから $a = b = p$ に限られる。

実際に $a = b = p$ とすれば $P(X = k) = {}_2C_k p^k (1-p)^{2-k}$ ($k = 0, 1, 2$) となる。よって存在し、その値は $(a, b) = (p, p)$ の 1 通りである。

(ii)

一様分布になるには $P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$ でなければならない。特に $(1-a)(1-b) = \frac{1}{3}, \quad ab = \frac{1}{3}$ である。第 1 式を展開し、第 2 式を代入すると $1 - a - b + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ より $a + b = 1$ を得る。

しかし、 $a + b = 1$ のもとでは $ab = a(1-a)$ であり、平方完成により $a(1-a) = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ である。これは $ab = \frac{1}{3}$ に反する。したがって、一様分布を与える (a, b) は存在しない。

結論として 存在しない である。

▶ 解法 2

【方針】

確率母関数 $(1 - a + az)(1 - b + bz)$ を用い、指定された分布の多項式と係数を比較する。(i) は同じ一次式の平方、(ii) は実数の一次式に分解できない 2 次式になることを見る。

【解答】

表の枚数を指数とする多項式を作ると、2 枚の硬貨による分布は

$$G(z) = \{(1 - a) + az\}\{(1 - b) + bz\}$$

で表される。

(i) 2 項分布の多項式は

$$\{(1 - p) + pz\}^2$$

である。定数項と z^2 の係数を比較すると

$$(1 - a)(1 - b) = (1 - p)^2, \quad ab = p^2.$$

これらから $a + b = 2p$ を得る。よって a, b は

$$T^2 - 2pT + p^2 = (T - p)^2 = 0$$

の 2 根であり、 $(a, b) = (p, p)$ の 1 通りだけである。

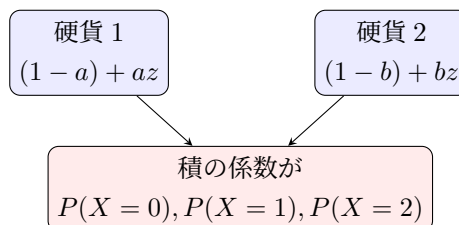
(ii) 一様分布なら

$$G(z) = \frac{1 + z + z^2}{3}.$$

右辺の 2 次式 $z^2 + z + 1$ の判別式は

$$1^2 - 4 = -3 < 0$$

である。一方、左辺は実数係数の一次式 2 個の積であるから、 $ab > 0$ なら実数根をもつ。 $ab = 0$ なら 2 次式にすらならない。したがって一致は不可能であり、該当する (a, b) は存在しない。



【総評】 難易度は 5、計算量は 4 程度である。想定時間は 12 分から 18 分程度。分布を全部展開してもよいが、 $X = 0$ と $X = 2$ の確率だけで和と積が決まることに気づくと速い。(i) では 2 枚の硬貨が同じ確率 p でなければならないことを、方程式の重解として示すと明快である。(ii) は $a + b = 1$ のもとで $ab \leq 1/4$ という基本評価を使い、 $1/3$ に届かないことを示す。

【第 6 問】

定数 a ($a \geq 0$) および b が与えられている. $x \geq 0$ で定義された関数 $y = f(x)$ で, 下の 2 条件 (A), (B) を満たすものを決定せよ.

(A) $f(x)$ は $x \geq 0$ で連続, $x > 0$ で微分可能

(B)

$$b \int_a^x f(t) dt = xf(x)$$

▶ 解法 1

【方針】

まず元の式に $x = a$ を代入して, $a > 0$ では $f(a) = 0$ が必要になることを見る. 次に $x > 0$ で微分し, $xf'(x) = (b-1)f(x)$ を得る. $x^{1-b}f(x)$ が一定であることから $f(x) = Cx^{b-1}$ と決め, $a > 0$ の条件, $a = 0$ での連続性, さらに元の積分方程式への代入確認で場合分けを完成させる.

【解答】

与えられた条件は, すべての $x \geq 0$ について

$$b \int_a^x f(t) dt = xf(x)$$

が成り立つということである.

まず $x = a$ を代入すると

$$b \int_a^a f(t) dt = af(a)$$

より $af(a) = 0$ を得る. したがって $a > 0$ の場合には $f(a) = 0$ が必要である.

次に $x > 0$ で両辺を微分する. 左辺の微分は $b f(x)$, 右辺の微分は $f(x) + x f'(x)$ だから $b f(x) = f(x) + x f'(x)$ すなわち $x f'(x) = (b-1)f(x)$ である.

この式から関数形を決める. $x > 0$ において

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{x^{1-b} f(x)\} &= (1-b)x^{-b} f(x) + x^{1-b} f'(x) \\ &= x^{-b} \{(1-b)f(x) + x f'(x)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって, ある定数 C が存在して $x^{1-b} f(x) = C$ すなわち $f(x) = Cx^{b-1}$ ($x > 0$) である.

1. $a > 0$ の場合

この場合は先に得た条件 $f(a) = 0$ がある. ところが $f(a) = Ca^{b-1}$ であり, $a > 0$ なので $a^{b-1} \neq 0$ である. したがって $C = 0$ である. ゆえに $f(x) = 0$ ($x > 0$) であり, 連続性から $f(0) = 0$ でもある. したがって $f(x) \equiv 0$ だけが解である. これは元の式を明らかに満たす.

2. $a = 0$ の場合

この場合, $x > 0$ では $f(x) = Cx^{b-1}$ である. あとは $x = 0$ で連続であることと, 元の式を満たすことを調べる. $b > 1$ のとき, $x^{b-1} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0+$) である. したがって任意の定数 C に対して $f(0) = 0$, $f(x) = Cx^{b-1}$ ($x > 0$) と定めれば連続である. また

$$\begin{aligned} b \int_0^x C t^{b-1} dt &= b \cdot C \frac{x^b}{b} \\ &= C x^b \end{aligned}$$

であり, 右辺も $xf(x) = x \cdot Cx^{b-1} = Cx^b$ なので元の式を満たす. $b = 1$ のとき, $x > 0$ では $f(x) = C$ である. 連続性により $f(0) = C$ とすればよい. このとき

$$\int_0^x C dt = Cx = xf(x)$$

であり, 元の式を満たす. よって任意の定数 C について $f(x) = C$ ($x \geq 0$) が解である. $b < 1$ のとき, もし $C \neq 0$ なら Cx^{b-1} は $x \rightarrow 0+$ で有限な極限をもたない. したがって連続性のためには $C = 0$ でなければならず, 零関数だけが残る.

以上をまとめると、解は次の通りである。

$$\begin{cases} a > 0: & f(x) \equiv 0, \\ a = 0, b > 1: & f(0) = 0, f(x) = Cx^{b-1} (x > 0) \quad (C \text{ は任意定数}), \\ a = 0, b = 1: & f(x) = C (x \geq 0) \quad (C \text{ は任意定数}), \\ a = 0, b < 1: & f(x) \equiv 0. \end{cases}$$

▶ 解法 2

【方針】

積分を

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

と一つの関数に置く。条件は $xF'(x) = bF(x)$ となるため $F(x) = Kx^b$ 型を得る。積分の始点条件と $x = 0$ での $f = F'$ の連続性から場合分けする。

【解答】

$x > 0$ で

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

とおくと、 $F'(x) = f(x)$ であり、条件 (B) は

$$xF'(x) = bF(x)$$

となる。

$b \neq 0$ のとき、 $x > 0$ では

$$\frac{d}{dx} \{x^{-b}F(x)\} = 0$$

だから $F(x) = Kx^b$ であり、

$$f(x) = F'(x) = Kbx^{b-1}$$

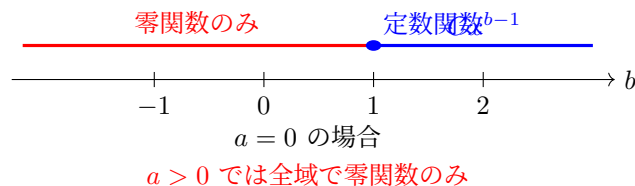
となる。 $b = 0$ では $xF'(x) = 0$ より $f(x) = 0$ である。

$a > 0$ なら $F(a) = 0$ である一方、 $F(a) = Ka^b$ なので $K = 0$ となる。従って零関数だけである。

$a = 0$ のとき、非零の K が許されるには $f(x) = Kbx^{b-1}$ が $x = 0$ まで連続でなければならない。したがって

$$\begin{cases} b > 1: & f(0) = 0, \quad f(x) = Cx^{b-1} (x > 0), \\ b = 1: & f(x) = C (x \geq 0), \\ b < 1: & f(x) \equiv 0 \end{cases}$$

である。ここで C は任意の実数である。各関数を元の積分式へ代入すれば十分性も確認できる。



【総評】 難易度は 7，計算量は 6 程度である。想定時間は 25 分から 35 分程度。微分して得る式だけで終わらず、元の積分方程式の $x = a$ 代入条件と $x = 0$ での連続性を必ず戻って確認するのが得点の中心である。特に $a > 0$ では $f(a) = 0$ が定数 $C = 0$ を強制し、 $a = 0$ では $b > 1$ のときだけ x^{b-1} 型の非零解が連続に許される。最後に元の式へ代入して十分性を示すと、場合分けの抜けを防げる。