

京都大学 1986 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

すべては 0 でない n 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ があり, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ かつ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ を満たすとき, $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n > 0$ が成り立つことを証明せよ.

▶ 解法 1 (部分和を尾部和へ直す)

【方針】

前からの部分和がすべて負であることを単調性と総和 0 から示す。重み付き和を正の尾部和の和に変形して結論する。

【解答】

$A_k = a_1 + \dots + a_k$ ($1 \leq k < n$) とおく。もし $A_k \geq 0$ なら、 $a_k \leq 0$ のときは全ての $a_1, \dots, a_k$ が負で矛盾し、 $a_k > 0$ のときは

$$a_{k+1} + \dots + a_n > 0$$

となって総和 0 に矛盾する。よって $A_k < 0$ である。

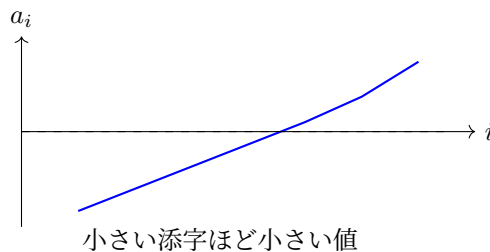
したがって全ての尾部和は

$$a_{k+1} + \dots + a_n = -A_k > 0.$$

一方、

$$\sum_{i=1}^n ia_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} + \dots + a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (-A_k) > 0.$$

これで示された。



▶ 解法 2 (すべての差の和にする)

【方針】

総和 0 を用いて、重み付き和を $(j-i)(a_j - a_i)$ の全組合せの和に直す。各項が非負で、少なくとも一つが正であることを確認する。

【解答】

恒等式

$$n \sum_{i=1}^n ia_i - \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)(a_j - a_i)$$

が成り立つ。実際、右辺で a_k の係数を集めると $nk - n(n+1)/2$ となり、左辺と一致する。

いま $\sum a_i = 0$ だから

$$n \sum_{i=1}^n ia_i = \sum_{i < j} (j-i)(a_j - a_i).$$

$i < j$ なら $j-i > 0$ 、また単調性より $a_j - a_i \geq 0$ である。全ての差が 0 なら全ての a_i が等しく、総和 0 から全て 0 となって仮定に反する。よって少なくとも一項は正であり、右辺は正である。したがって $\sum ia_i > 0$ である。

【総評】 難易度 5、計算量 3。目安時間は 14 分である。部分和解法では $A_k < 0$ の厳密性、差の和の解法では少なくとも一つの差が正である理由が採点点になる。「並びが同順だから正」とだけ書かず、正の項への分解を示す。

【第 2 問】

座標空間において、平面 $z = 1$ 上に一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。点 A, B, C から平面 $z = 0$ におろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。動点 P は A から B の方向へ出発し、一定の速さで $\triangle ABC$ の周を一周する。動点 Q は同時に E から F の方向へ出発し、 P と同じ一定の速さで $\triangle DEF$ の周を一周する。線分 PQ が通過してできる曲面と $\triangle ABC, \triangle DEF$ によって囲まれる立体を V とする。

- (1) 平面 $z = a$ ($0 \leq a \leq 1$) による V の切り口はどのような図形か。
- (2) V の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (水平断面の辺ベクトル)

【方針】

高さ a の線分 PQ 上の点を、上端と下端の内分点として表す。一周の三局面から断面の三頂点を求め、辺長と断面積を計算して積分する。

【解答】

- (1) 平面 $z = a$ と線分 PQ の交点の水平位置は $aP + (1 - a)Q$ である。一周の三局面から断面の頂点は

$$aA + (1 - a)E, \quad aB + (1 - a)F, \quad aC + (1 - a)D$$

となる。隣り合う辺の単位ベクトルを $\vec{u}, \vec{v}$ とし、そのなす角を 120° とすると断面の一边は $a\vec{u} + (1 - a)\vec{v}$ である。よって辺長の二乗は

$$a^2 + (1 - a)^2 - a(1 - a) = 3a^2 - 3a + 1.$$

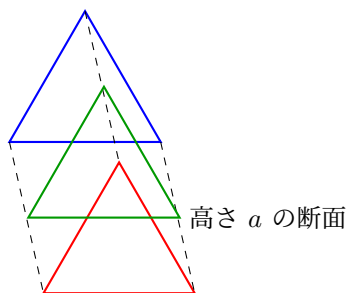
三辺とも同じなので、断面は辺長 $\sqrt{3a^2 - 3a + 1}$ の正三角形である。

- (2) 断面積は

$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2 - 3a + 1).$$

したがって

$$V = \int_0^1 S(a) da = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[a^3 - \frac{3}{2}a^2 + a \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$



▶ 解法 2 (具体的な座標で三頂点を追う)

【方針】

下の正三角形に座標を置き、断面の三頂点を直接求める。座標差から三辺が等しいことと面積を確認し、体積へ進む。

【解答】

(1) $D = (0, 0), E = (1, 0), F = (1/2, \sqrt{3}/2)$ とする。高さ a の断面の三頂点は

$$U = (1-a)E + aD, \quad V = (1-a)F + aE, \quad W = (1-a)D + aF.$$

計算すると

$$UV^2 = VW^2 = WU^2 = 3a^2 - 3a + 1.$$

よって断面は正三角形である。

(2) 正三角形の面積公式から

$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2 - 3a + 1).$$

これを $0 \leq a \leq 1$ で積分して

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 (3a^2 - 3a + 1) da = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

を得る。

【総評】 難易度 6、計算量 5。目安時間は 22 分である。 Q が E から出発するため単なる相似断面ではない。高さ a の点を上端・下端の内分として表し、断面の三頂点を明示する。積分は表示数式で独立させる。

【第 3 問】

座標平面の原点を O とし、 $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする。また α, β は 2 つの実数とする。任意の点 P に対しベクトル $\vec{OP}$ の $\vec{OA}$ への正射影を $\vec{OP}_1$ (すなわち点 P_1 は P から O と A を通る直線へおろした垂線の足), $\vec{OP}$ の $\vec{OB}$ への正射影を $\vec{OP}_2$ とし、一次変換 $f_{\alpha, \beta}$ を $f_{\alpha, \beta}(\vec{OP}) = \alpha \vec{OP}_1 + \beta \vec{OP}_2$ によって定める。

一次変換 g がどのような α, β に対しても $f_{\alpha, \beta} \circ g = g \circ f_{\alpha, \beta}$ ($\circ$ は変換の合成を表す) となるための必要十分条件は、ある α', β' に対して $g = f_{\alpha', \beta'}$ となることである。これを証明せよ。

▶ 解法 1 (二つの射影だけを使う)

【方針】

直交する OA, OB 方向を基底とする。十分性を成分で確認し、必要性では $f_{1,0}, f_{0,1}$ との可換性だけで g が二方向を混ぜられないことを示す。

【解答】

$\vec{e}_1 = \vec{OA}, \vec{e}_2 = \vec{OB}$ とする。両者は直交し、任意のベクトルは $s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2$ と一意に書ける。また

$$f_{\alpha, \beta}(s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2) = \alpha s\vec{e}_1 + \beta t\vec{e}_2.$$

$g = f_{\alpha', \beta'}$ なら二方向を別々に伸縮するだけなので、任意の $f_{\alpha, \beta}$ と可換である。

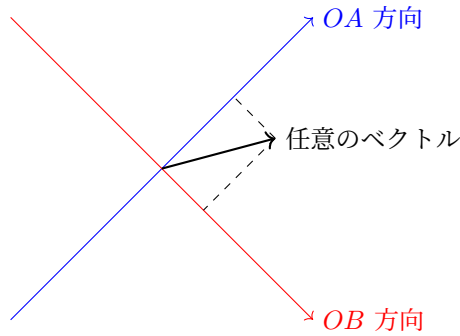
逆に全ての $f_{\alpha, \beta}$ と可換とする。 $g(\vec{e}_1) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ とおく。 $f_{1,0}$ との可換性を $\vec{e}_1$ に適用すると

$$u\vec{e}_1 = f_{1,0}(g(\vec{e}_1)) = g(\vec{e}_1)$$

なので $v = 0$ である。同様に $f_{0,1}$ を $\vec{e}_2$ に適用すると $g(\vec{e}_2) = \beta'\vec{e}_2$ となる。よってある α', β' に対し

$$g(s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2) = \alpha's\vec{e}_1 + \beta't\vec{e}_2 = f_{\alpha', \beta'}(s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2).$$

必要十分性が示された。



▶ 解法 2 (符号を反転する変換を使う)

【方針】

$f_{1,-1}$ は OA 方向を保ち OB 方向の符号を反転する。これと可換する一次変換は二方向を混ぜられないことを、像の係数比較で示す。

【解答】

$h = f_{1,-1}$ とする。すると

$$h(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad h(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2.$$

全ての $f_{\alpha,\beta}$ と可換する g は特に h と可換する。

$g(\vec{e}_1) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ とおくと

$$h(g(\vec{e}_1)) = u\vec{e}_1 - v\vec{e}_2, \quad g(h(\vec{e}_1)) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2.$$

よって $v = 0$ である。同様に $g(\vec{e}_2) = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ に適用すると $p = 0$ となる。したがって

$$g(\vec{e}_1) = \alpha'\vec{e}_1, \quad g(\vec{e}_2) = \beta'\vec{e}_2$$

であり、一次性から $g = f_{\alpha',\beta'}$ である。逆向きは二方向の係数を順に掛けるだけなので直ちに成り立つ。

【総評】 難易度 7、計算量 5。目安時間は 26 分である。 OA, OB が直交することを最初に確認する。必要性では「全ての α, β 」のうち射影 2 個または符号反転 1 個を選び、二方向の混合係数が 0 になることを明示する。行列式は不要である。

【第 4 問】

同一平面上に 2 つの三角形 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ があり、それぞれの外接円の半径は共に 1 であるとする。この 2 つの外接円の中心を結ぶ線分の中点を M , 線分 AA' , BB' , CC' の中点をそれぞれ P , Q , R とする。

- (1) $MP \leq 1$, $MQ \leq 1$, $MR \leq 1$ となることを示せ。
- (2) もし $\triangle PQR$ が鋭角三角形でその外接円の半径が 1 となるならば、点 M はこの外接円の中心と一致することを示せ。さらにこのとき $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle PQR$ はすべて合同となることを示せ。

▶ 解法 1 (単位ベクトルの平均)

【方針】

二つの外心から対応頂点への単位ベクトルを取り、中点間ベクトルがその平均になることを使う。(2) は鋭角三角形の外心が内部にあることから正係数の関係を作る。

【解答】

(1) 外心を O, O' とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{O'A'} = \vec{u}'$ とする。両者の長さは 1 で

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\vec{u} + \vec{u}'}{2}.$$

よって $MP \leq 1$ である。同様に $MQ, MR \leq 1$ となる。

(2) $\triangle PQR$ の外心を原点とし、頂点の位置ベクトルを $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ とする。鋭角なので外心は内部にあり、正数 λ, μ, ν により

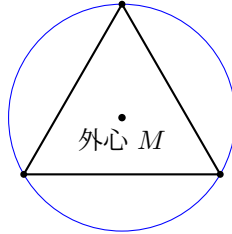
$$\lambda\vec{p} + \mu\vec{q} + \nu\vec{r} = \vec{0}$$

と書ける。 M の位置ベクトルを $\vec{m}$ とすると、(1) から $|\vec{m} - \vec{p}| \leq 1 = |\vec{p}|$ である。もし $\vec{m} \neq 0$ なら

$$\vec{m} \cdot \vec{p} \geq \frac{|\vec{m}|^2}{2} > 0$$

で、 $\vec{q}, \vec{r}$ にも同じことが成り立つ。上の正係数関係と矛盾するので $\vec{m} = 0$ 、すなわち M は外心である。

従って $MP = MQ = MR = 1$ である。三角不等式の等号条件から $\vec{u} = \vec{u}'$ となり、対応する三本の半径ベクトルは三つの三角形で一致する。よって三角形は全て合同である。



▶ 解法 2 (半径 1 の最小包含円)

【方針】

(1) の三つの不等式は、中心 M 、半径 1 の円板が P, Q, R を含むことを意味する。鋭角三角形の最小包含円が外接円で一意であることを証明して中心を決める。

【解答】

(1) 中点公式と三角不等式により $MP, MQ, MR \leq 1$ を得る。

(2) 鋭角三角形の外心 U は内部にある。従って正数 λ, μ, ν で

$$\lambda \vec{UP} + \mu \vec{UQ} + \nu \vec{UR} = \vec{0}$$

と書ける。半径 1 の円板が三頂点を含み、その中心を X とする。もし $X \neq U$ なら、三つの不等式 $XP, XQ, XR \leq 1$ を二乗すると

$$\vec{UX} \cdot \vec{UP}, \quad \vec{UX} \cdot \vec{UQ}, \quad \vec{UX} \cdot \vec{UR}$$

が全て正となり、上の正係数と矛盾する。よって半径 1 で三頂点を含む円の中心は U だけである。(1) の円板の中心 M も U に一致する。

以後 $MP = MQ = MR = 1$ なので、対応する二本の単位半径の平均の長さが 1 になる。等号条件より二本は同一方向であり、三組の対応辺が等しくなる。従って三三角形は合同である。

【総評】 難易度 8、計算量 6。目安時間は 34 分である。(1) は単位ベクトルの平均、(2) は鋭角条件から外心が内部にあることを使う。中心一致の後、三角不等式の等号条件まで戻って対応半径の方向一致を示す。

【第 5 問】

n 個のサイコロを同時にふり、出た目の数のうちの最大のものを M_n 、最小のものを m_n とする。

- (1) $1 \leq i \leq j \leq 6$ を満たす整数 i, j に対して $M_n = j$ かつ $m_n = i$ となる確率 $P(M_n = j, m_n = i)$ を n, i, j で表せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{M_n}{m_n}\right)$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} V\left(\frac{M_n}{m_n}\right)$ を求めよ。
(一般に確率変数 X に対して $E(X)$ はその平均、 $V(X)$ はその分散を表す。)

▶ 解法 1 (包除と集中)

【方針】

最大・最小を指定するため、区間内の出方から両端が欠ける場合を包除する。極限は 1 と 6 が共に現れる確率が 1 へ近づくことと有界性を使う。

【解答】

- (1) $i < j$ のとき、全出目が $i, \dots, j$ に入り、 i, j が共に現れる必要がある。包除により

$$P(M_n = j, m_n = i) = \frac{(j-i+1)^n - 2(j-i)^n + (j-i-1)^n}{6^n}.$$

$i = j$ では全て同じ目なので $P = 6^{-n}$ である。

- (2) 少なくとも一つ 1 と一つ 6 が出る確率は

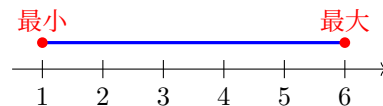
$$1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n \rightarrow 1.$$

$X_n = M_n/m_n$ とすると常に $1 \leq X_n \leq 6$ で、この事象上では $X_n = 6$ である。従って

$$E|X_n - 6| \leq 5P(X_n \neq 6) \rightarrow 0.$$

同様に $E(X_n^2) \rightarrow 36$ だから

$$\lim E(X_n) = 6, \quad \lim V(X_n) = 36 - 6^2 = 0.$$



▶ 解法 2 (区間確率の二階差)

【方針】

全出目が $[i, j]$ に入る確率を基本量とし、最小と最大を端点に固定するため左右の区間を差し引く。極限は失敗確率を直接上から抑える。

【解答】

- (1) 全出目が i 以上 j 以下となる確率は

$$H(i, j) = \left(\frac{j-i+1}{6}\right)^n.$$

$i < j$ では最小を i 、最大を j に固定する二階差を取って

$$P = H(i, j) - H(i+1, j) - H(i, j-1) + H(i+1, j-1),$$

すなわち解法 1 の式を得る。 $i = j$ は 6^{-n} である。

- (2) $X_n \neq 6$ なら 1 が一度も出ないか 6 が一度も出ないので

$$P(X_n \neq 6) \leq 2\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

従って

$$|E(X_n) - 6| \leq 10\left(\frac{5}{6}\right)^n \rightarrow 0.$$

また $|X_n^2 - 36| \leq 35$ より二乗平均も 36 へ近づく。よって平均の極限は 6、分散の極限は 0 である。

【総評】 難易度 6、計算量 5。目安時間は 22 分である。(1) は両端の目が少なくとも一度出る条件を包除する。 $i = j$ は別扱いする。(2) は分布全体を足さず、1 と 6 が現れない確率を指数的に抑え、有界性から平均・二乗平均を処理する。

【第 6 問】

$0 < r < 1$ となる実数 r に対し、点 $O = (0, 0)$ を中心とし半径が r の円を C とする。円 C' は中心が $O' = (1, 0)$ で円 C と異なる 2 点 P, Q で交わり、 $OP \perp O'P$ となるものとする。円 C の内部を D 、円 C' の内部を D' 、四辺形 $OPO'Q$ の内部を D'' と表す。 r を $0 < r < 1$ の範囲で変化させるとき、 D'' から交わり $D \cap D'$ を除いた部分の面積の最大値を求めよ。

▶ 解法 1 (交点角とレンズ面積)

【方針】

直交条件から交点座標と二円の半径を求め、 $r = \cos \phi$ と置く。四辺形と二円共通部分を扇形で表し、微分の符号を調べる。

【解答】

上側の交点を $P = (x, y)$ とする。 $OP \perp O'P$ と $OP = r$ より

$$x = r^2, \quad y = r\sqrt{1-r^2}.$$

$r = \cos \phi$ ($0 < \phi < \pi/2$) とおくと、 $O'P = \sin \phi$ である。四辺形の面積は $\sin \phi \cos \phi$ で、二円の共通部分は

$$\phi \cos^2 \phi + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \sin^2 \phi - \sin \phi \cos \phi.$$

従って求める面積は

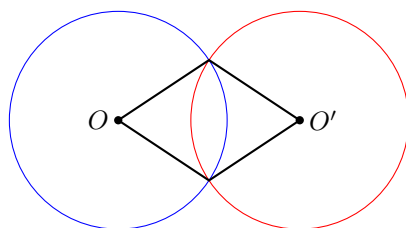
$$A(\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi - \phi \cos^2 \phi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \sin^2 \phi.$$

微分すると

$$A'(\phi) = \cos 2\phi + \left(2\phi - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2\phi.$$

$u = 2\phi - \pi/2$ と置けば $A' = u \cos u - \sin u$ で、 $\tan u > u$ を用いると $\phi < \pi/4$ で正、 $\phi > \pi/4$ で負である。よって最大は $\phi = \pi/4$ 、 $r = 1/\sqrt{2}$ のとき

$$A_{\max} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$



▶ 解法 2 (対称点からのずれで比較)

【方針】

面積式を $\phi = \pi/4 + t$ で整理し、最大候補の対称点との差を一変数の非負式へ直す。導関数の符号を $\tan x > x$ で示す。

【解答】

交点とレンズ面積の計算により

$$A(\phi) = \sin 2\phi - \frac{\pi}{4} - \left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\phi.$$

$t = \phi - \pi/4$ とおくと

$$A(\phi) = \cos 2t - \frac{\pi}{4} + t \sin 2t.$$

従って

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) - A(\phi) = H(t) = 1 - \cos 2t - t \sin 2t.$$

H は偶関数である。 $0 < t < \pi/4$ では

$$H'(t) = \sin 2t - 2t \cos 2t.$$

$0 < 2t < \pi/2$ で $\tan 2t > 2t$ だから $H'(t) > 0$ である。よって $H(t) \geq 0$ 、等号は $t = 0$ のみである。したがって最大は $\phi = \pi/4$ で

$$A_{\max} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

となる。

【総評】 難易度 8、計算量 7。目安時間は 36 分である。直交条件から二円の半径が $r, \sqrt{1-r^2}$ になること、四辺形からレンズ部分を引くことが核心である。対称性だけで最大と断言せず、 $\tan u > u$ による単調性または差の非負性まで示す。