

京都大学 1987 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

x の 3 次式

$$f(x) = ax^3 + (a^2 + b)x^2 + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a$$

$$g(x) = ax^3 + (a^2 - b)x^2 + (a - 1)x + c^2 - b^2$$

および x の 2 次式

$$h(x) = x^2 + ax + b$$

を考える. (a, b, c は定数, $a \neq 0$)

$f(x), g(x)$ はともに $h(x)$ で割り切れるか, または, ともに $h(x)$ では割り切れないかの, いずれかであることを示せ.

▶ 解法 1: 二次式を法として余りを求める

【方針】

$h(x) = x^2 + ax + b$ で割った余りだけを比較する. $x^2 \equiv -ax - b$ と $x^3 \equiv (a^2 - b)x + ab$ を用いると, $f(x)$ の余りと $g(x)$ の余りはいずれも 1 次式として計算できる. 割り切れる条件は余りの x の係数と定数項がともに 0 になることなので, その条件が両方で同じになることを示す.

【解答】

$h(x) = x^2 + ax + b$ で割った余りを調べる. $h(x) = 0$ とみなして計算すれば $x^2 \equiv -ax - b$ である. さらに

$$\begin{aligned} x^3 &= x \cdot x^2 \equiv x(-ax - b) \\ &= -ax^2 - bx \\ &\equiv -a(-ax - b) - bx \\ &= (a^2 - b)x + ab \end{aligned}$$

である.

まず $f(x)$ の余りを求める.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + (a^2 + b)x^2 + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a \\ &\equiv a\{(a^2 - b)x + ab\} + (a^2 + b)(-ax - b) \\ &\quad + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a. \end{aligned}$$

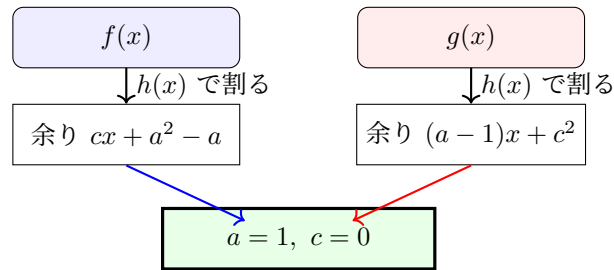
x の係数は $a(a^2 - b) - a(a^2 + b) + 2ab + c = c$ であり, 定数項は $a^2b - b(a^2 + b) + a^2 + b^2 - a = a^2 - a$ である. したがって $f(x)$ の余りは $cx + a^2 - a$ である. よって $f(x)$ が $h(x)$ で割り切れる条件は $c = 0, \quad a^2 - a = 0$ である. $a \neq 0$ より, これは $a = 1, \quad c = 0$ と同値である.

次に $g(x)$ の余りを求める.

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^3 + (a^2 - b)x^2 + (a - 1)x + c^2 - b^2 \\ &\equiv a\{(a^2 - b)x + ab\} + (a^2 - b)(-ax - b) \\ &\quad + (a - 1)x + c^2 - b^2. \end{aligned}$$

x の係数は $a(a^2 - b) - a(a^2 - b) + a - 1 = a - 1$ であり, 定数項は $a^2b - b(a^2 - b) + c^2 - b^2 = c^2$ である. したがって $g(x)$ の余りは $(a - 1)x + c^2$ である. よって $g(x)$ が $h(x)$ で割り切れる条件は $a - 1 = 0, \quad c^2 = 0$ すなわち $a = 1, \quad c = 0$ である.

以上より, $f(x)$ が $h(x)$ で割り切れる条件と, $g(x)$ が $h(x)$ で割り切れる条件はどちらも $a = 1, c = 0$ で一致する. したがって, $f(x), g(x)$ はともに $h(x)$ で割り切れるか, またはともに $h(x)$ では割り切れない.



▶ 解法 2：商の係数を比較する

【方針】

f, g が h で割り切れると仮定し、先頭係数から商を一次式に限定する。積を展開して係数比較すれば、どちらも同じ条件 $a = 1, c = 0$ に帰着する。

【解答】

まず $f(x)$ が $h(x) = x^2 + ax + b$ で割り切れるとする。先頭項が ax^3 なので、商は $ax + \lambda$ と書ける。展開すると

$$(x^2 + ax + b)(ax + \lambda) = ax^3 + (a^2 + \lambda)x^2 + (ab + a\lambda)x + b\lambda.$$

$f(x)$ の x^2 の係数と比較して $\lambda = b$ である。すると x の係数比較から

$$2ab = 2ab + c$$

となるので $c = 0$ である。さらに定数項の比較から

$$b^2 = a^2 + b^2 - a$$

であり、 $a(a-1) = 0$ を得る。仮定 $a \neq 0$ より $a = 1$ である。逆に $a = 1, c = 0$ なら全ての係数が一致するから、 f は h で割り切れる。

次に $g(x)$ が $h(x)$ で割り切れるとする。商を $ax + \mu$ とおくと

$$(x^2 + ax + b)(ax + \mu) = ax^3 + (a^2 + \mu)x^2 + (ab + a\mu)x + b\mu.$$

x^2 の係数比較から $\mu = -b$ である。このとき積の x の係数は 0、定数項は $-b^2$ だから、 g との比較により

$$a - 1 = 0, \quad c^2 - b^2 = -b^2$$

を得る。すなわち $a = 1, c = 0$ であり、逆も成り立つ。

したがって f, g が h で割り切れる条件はともに $a = 1, c = 0$ で一致する。よって題意が成り立つ。

【総評】 難度 6、計算量 6、目安時間 18 分。余りの計算と商の係数比較の 2 通りで、割り切れる必要十分条件がともに $a = 1, c = 0$ となることを確認した。片方だけの十分性で終えず、逆向きと仮定 $a \neq 0$ を明記する。

【第 2 問】

定数 a, p, q に対して、次のように x_n, y_n の列を作る。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(1) x_2, y_2, x_3, y_3 を求めよ。

(2) $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ。

▶ 解法 1：成分漸化式を 2 回進める

【方針】

まず与えられた式を成分ごとの漸化式に直し、 x_{n+2} と y_{n+2} を x_n, y_n で表す。直接代入すると $x_{n+2} = 2(1-a)x_n$ 、 $y_{n+2} = 2(1-a)y_n$ となり、2 回ごとに同じ倍率がかかることが分かる。(1) は $n = 1$ から 2 回分を計算し、(2) は $|2(1-a)| < 1$ により偶数番・奇数番の両方が 0 へ近づくことを示す。

【解答】

与えられた関係を成分で書くと $x_{n+1} = (1-a)x_n - (1+a)y_n$ および $y_{n+1} = (a-1)x_n + (a-1)y_n$ である。

(1) $x_1 = p, y_1 = q$ だから $x_2 = (1-a)p - (1+a)q$ であり、 $y_2 = (a-1)p + (a-1)q = (a-1)(p+q)$ である。

次に、一般に 2 回進めた形を求めておく。まず

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= (1-a)x_{n+1} - (1+a)y_{n+1} \\ &= (1-a)\{(1-a)x_n - (1+a)y_n\} \\ &\quad - (1+a)\{(a-1)x_n + (a-1)y_n\} \\ &= \{(1-a)^2 + (1-a)(1+a)\}x_n \\ &= 2(1-a)x_n. \end{aligned}$$

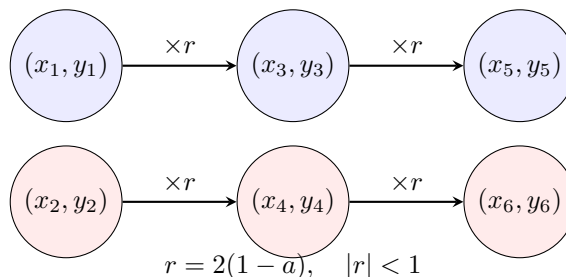
同様に

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= (a-1)x_{n+1} + (a-1)y_{n+1} \\ &= (a-1)\{(1-a)x_n - (1+a)y_n\} \\ &\quad + (a-1)\{(a-1)x_n + (a-1)y_n\} \\ &= \{-(a-1)^2 + (a-1)^2\}x_n \\ &\quad + \{-(a-1)(1+a) + (a-1)^2\}y_n \\ &= 2(1-a)y_n. \end{aligned}$$

したがって $x_3 = 2(1-a)x_1 = 2(1-a)p$ 、 $y_3 = 2(1-a)y_1 = 2(1-a)q$ である。

(2) 上で得た関係より $x_{n+2} = rx_n$ 、 $y_{n+2} = ry_n$ 、 $r = 2(1-a)$ である。 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ のとき $-1 < 2(1-a) < 1$ すなわち $|r| < 1$ である。

したがって奇数番については $x_{2k+1} = r^k p$ 、 $y_{2k+1} = r^k q$ であり、 $k \rightarrow \infty$ でどちらも 0 に近づく。また偶数番についても $x_{2k} = r^{k-1} x_2$ 、 $y_{2k} = r^{k-1} y_2$ であり、これも 0 に近づく。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ である。



▶ 解法 2：係数行列を 2 乗する

【方針】

原問題の係数行列を M とおき、直接 M^2 を計算する。 $M^2 = 2(1-a)I$ から奇数番と偶数番の一般形を一度に得る。

【解答】

係数行列を

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ a-1 & a-1 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) 定義から

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)p - (1+a)q \\ (a-1)(p+q) \end{pmatrix}.$$

また行列を直接掛けると

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2(1-a) & 0 \\ 0 & 2(1-a) \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-a)p \\ 2(1-a)q \end{pmatrix}.$$

(2) $r = 2(1-a)$ とおけば $M^2 = rI$ である。したがって

$$\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix} = r^k \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} = r^{k-1} M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$$

のとき $|r| < 1$ だから、奇数番・偶数番のどちらも各成分が 0 へ近づく。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 6、目安時間 18 分。成分を 2 回進める方法と、原問題が明示する係数行列の 2 乗で $x_{n+2} = 2(1-a)x_n$, $y_{n+2} = 2(1-a)y_n$ を照合した。奇数番だけでなく偶数番の極限も示す。行列を用いたのは原問題が行列を扱う本問だけである。

【第 3 問】

不等式 $a \cos 2\theta + b \cos \theta < 1$ がすべての実数 θ について成り立つような点 (a, b) の範囲を図示せよ。

▶ 解法 1：余弦を変数とする二次関数に直す

【方針】

$t = \cos \theta$ と置くと、 t は $[-1, 1]$ 全体を動き、条件は 2 次関数 $F(t) = 2at^2 + bt - a$ が区間 $[-1, 1]$ で常に 1 未満となることに変わる。端点から $a + |b| < 1$ が必要である。 $a \geq 0$ では最大は端点で決まる。 $a < 0$ では上に凸なので頂点が区間内にあるときだけ頂点条件を追加し、最終的に $-1 < a < -\frac{1}{3}$ の放物線内と、 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$ の直線に挟まれた領域に整理する。

【解答】

$t = \cos \theta$ とおく。 θ がすべての実数を動くとき、 t は区間 $[-1, 1]$ 全体を動く。また $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2t^2 - 1$ だから、与えられた不等式は $a(2t^2 - 1) + bt < 1$ すなわち $F(t) = 2at^2 + bt - a < 1$ がすべての $-1 \leq t \leq 1$ で成り立つことと同値である。

まず端点条件を調べる。 $t = 1$ から $a + b < 1$ を得る。また $t = -1$ から $a - b < 1$ を得る。したがって $a + |b| < 1$ が必要である。

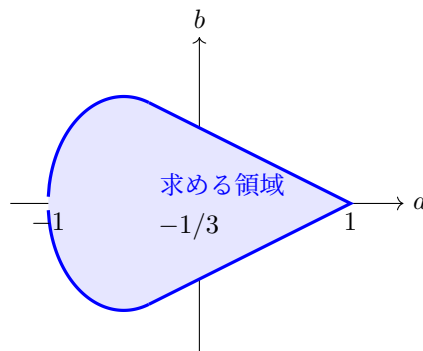
【 $a \geq 0$ の場合】このとき $F(t)$ は下に凸、または 1 次式である。区間 $[-1, 1]$ における最大値は端点のどちらかでとるので、端点条件だけで十分である。よって $a \geq 0$, $a + |b| < 1$ である。ただしこの不等式から自動的に $a < 1$ である。

【 $a < 0$ の場合】このとき $F(t)$ は上に凸であり、頂点が区間内にある場合には頂点で最大値をとる。頂点は $t = -\frac{b}{4a}$ である。頂点が $[-1, 1]$ に入る条件は $|b| \leq -4a$ である。

頂点が区間内にあるとき、頂点での値は $F\left(-\frac{b}{4a}\right) = -a - \frac{b^2}{8a}$ である。したがって必要な条件は $-a - \frac{b^2}{8a} < 1$ である。 $a < 0$ に注意して整理すると $b^2 < -8a(a + 1)$ となる。この右辺が正でなければならないため、この場合は $-1 < a < 0$ である。

端点条件と頂点条件を合わせて図示しやすい形に整理する。 $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ では、 $|b| < 1 - a$ のもとで頂点が区間内に入っても、上の頂点条件は自動的に満たされる。実際、この範囲では $(-4a)^2 \leq -8a(a + 1)$ である。したがって $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ では端点条件だけでよい。

一方、 $-1 < a < -\frac{1}{3}$ では、端点条件を満たす点では頂点が区間内に入り、頂点条件 $b^2 < -8a(a + 1)$ が端点条件より強い。よって求める範囲は $-1 < a < -\frac{1}{3}$, $b^2 < -8a(a + 1)$ で表される部分と、 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$, $|b| < 1 - a$ で表される部分の和集合である。境界はすべて含まれない。ただし 2 つの部分は $a = -\frac{1}{3}$ で接続し、そのとき $|b| < \frac{4}{3}$ である。



▶ 解法 2: $|b|$ の上限を一変数で最小化する

【方針】

条件を $u = |\cos \theta|$ で対称化する。各 $u > 0$ に対する $|b|$ の上限を作り、その上限関数の最小値が端点と内部のどちらで生じるかを調べる。

【解答】

$t = \cos \theta$ とおく。 t と $-t$ の両方で

$$2at^2 + bt - a < 1$$

が必要なので、 $u = |t| \in [0, 1]$ を用いると

$$2au^2 + |b|u - a < 1$$

が全ての u で成り立つことと同値である。 $u = 0$ からまず $a > -1$ が必要である。

$0 < u \leq 1$ では

$$|b| < \phi_a(u), \quad \phi_a(u) = \frac{1+a}{u} - 2au.$$

したがって $|b|$ は $\phi_a(u)$ の最小値より小さくしなければならない。

$$\phi'_a(u) = -\frac{1+a}{u^2} - 2a.$$

$a \geq -1/3$ では ϕ_a の最小値は $u = 1$ で生じ、

$$\min \phi_a = 1 - a.$$

一方、 $-1 < a < -1/3$ では

$$u = \sqrt{\frac{1+a}{-2a}}$$

で最小となり、

$$\min \phi_a = 2\sqrt{-2a(a+1)} = \sqrt{-8a(a+1)}.$$

よって求める領域は

$$\begin{cases} -1 < a < -\frac{1}{3}, & b^2 < -8a(a+1), \\ -\frac{1}{3} \leq a < 1, & |b| < 1 - a \end{cases}$$

の和集合であり、境界は含まない。

【総評】 難度 8、計算量 8、目安時間 28 分。二次関数の最大値による分類と、 $|b|$ の上限関数を最小化する方法で領域を照合した。接点 $a = -1/3$ 、左端 $a = -1$ 、右端 $a = 1$ と全境界が開いていることを図と式の両方で確認する。

【第 4 問】

3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数) のグラフ $y = f(x)$ と、定数 m とを考える。

- (1) このグラフの接線で傾き m のものは何本あるか。
- (2) 傾き m の接線が 2 本ある場合について、その接線 l_1, l_2 の接点を P_1, P_2 とし、 l_1, l_2 がグラフと交わる他の点を Q_1, Q_2 とすれば、 $P_1Q_1 = P_2Q_2$ であることを示せ。

▶ 解法 1：接点方程式と三次式の因数分解を使う

【方針】

傾き m の接線の接点は $f'(x) = m$ の解で決まるので、(1) は 2 次方程式 $3x^2 + 2ax + b - m = 0$ の判別式で本数を分類する。(2) では接点の x 座標を t とし、接線と三次曲線の交点方程式 $f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) = 0$ を因数分解する。接点以外の交点の x 座標が $-2t - a$ になるため、接線上の距離は $|3t + a|\sqrt{1 + m^2}$ で表せる。2 つの接点の和を使って、この値が等しいことを示す。

【解答】

(1) 傾き m の接線の接点の x 座標を t とする。接線の傾きは $f'(t)$ であるから $f'(t) = m$ が必要十分である。ここで $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ なので、接点の x 座標は $3t^2 + 2at + b - m = 0$ の解である。

この 2 次方程式の判別式を D とすると $D = (2a)^2 - 4 \cdot 3(b - m) = 4(a^2 - 3b + 3m)$ である。よって接線の本数は

$$\begin{cases} 2 & (a^2 - 3b + 3m > 0), \\ 1 & (a^2 - 3b + 3m = 0), \\ 0 & (a^2 - 3b + 3m < 0) \end{cases}$$

である。

(2) 傾き m の接線が 2 本あるとする。その一方の接点の x 座標を t とする。接点は $(t, f(t))$ であり、接線の方程式は $y = f(t) + f'(t)(x - t)$ である。この接線と曲線 $y = f(x)$ との共有点の x 座標は $f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) = 0$ を満たす。

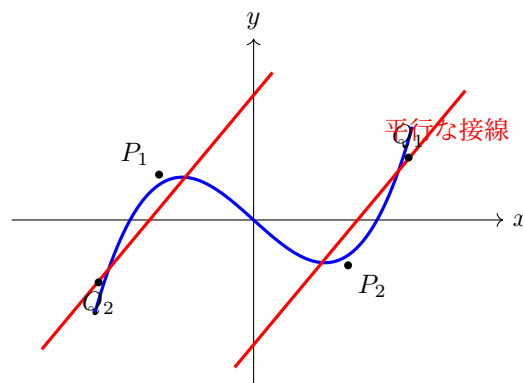
左辺を計算する。 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ だから

$$\begin{aligned} f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) &= x^3 - t^3 + a(x^2 - t^2) + b(x - t) \\ &\quad - (3t^2 + 2at + b)(x - t) \\ &= (x - t)\{x^2 + xt + t^2 + a(x + t) + b \\ &\quad - 3t^2 - 2at - b\} \\ &= (x - t)\{x^2 + xt - 2t^2 + ax - at\} \\ &= (x - t)^2(x + 2t + a). \end{aligned}$$

したがって接点以外の交点の x 座標は $-2t - a$ である。

接線の傾きは m なので、接線上で x 座標が t から $-2t - a$ に変わると、線分の長さは $|(-2t - a) - t|\sqrt{1 + m^2} = |3t + a|\sqrt{1 + m^2}$ である。

2 本の接線の接点の x 座標を t_1, t_2 とする。これらは $3t^2 + 2at + b - m = 0$ の 2 つの解であるから $t_1 + t_2 = -\frac{2a}{3}$ である。したがって $3t_1 + a = -(3t_2 + a)$ となり、 $|3t_1 + a| = |3t_2 + a|$ である。よって対応する距離は等しく $P_1Q_1 = P_2Q_2$ である。



▶ 解法 2：三次関数を平行移動して対称化する

【方針】

横方向の平行移動で二次項を消し、三次関数を $F(X) = X^3 + pX + q$ の形にする。同じ傾きの二接点が $X = \pm s$ になる対称性から距離を比較する。

【解答】

$X = x + a/3$ と平行移動すると、グラフは

$$Y = F(X) = X^3 + pX + q$$

の形になる。平行移動では接線の傾きも点間距離も変わらない。

(1) 傾き m の接点の X 座標は

$$F'(X) = 3X^2 + p = m$$

を満たす。したがって

$$\begin{cases} 2\text{本} & (m > p), \\ 1\text{本} & (m = p), \\ 0\text{本} & (m < p). \end{cases}$$

ここで変数変換から $p = b - a^2/3$ なので、これは

$$a^2 - 3b + 3m$$

の正・零・負による分類と一致する。

(2) 二本あるとき、接点の X 座標は $s, -s$ である。 $X = s$ における接線と曲線の交点を調べると

$$F(X) - F(s) - F'(s)(X - s) = (X - s)^2(X + 2s).$$

したがって接点以外の交点は $X = -2s$ であり、横方向の差は $3|s|$ である。同様に接点 $-s$ の接線は、他の交点 $2s$ まで横方向に $3|s|$ だけ離れている。

両接線の傾きは同じ m だから、接線上の実際の距離はどちらも

$$3|s|\sqrt{1 + m^2}.$$

よって $P_1Q_1 = P_2Q_2$ である。

【総評】 難度 7、計算量 7、目安時間 24 分。接点方程式の判別式と、二次項を消す平行移動による対称化で接線本数を照合した。三次曲線と接線の交点では接点が重解となるため $(x - t)^2$ を正しく取り出し、水平差に $\sqrt{1 + m^2}$ を掛けて実距離に直す。

【第 5 問】

空間において、平面 $ax + y + z + a - 2 = 0$ (a は定数) を考える。

- (1) この平面上の点のうち原点に一番近いものの座標を求めよ。
- (2) 原点を中心とする半径 3 の球体がこの平面で分けられる二つの部分のうち、体積の大きい方の体積を $V(a)$ とする。 a をいろいろ変えたとき、 $V(a)$ が最小になる a と、そのときの $V(a)$ の値を求めよ。

▶ 解法 1：平面までの距離を微分で最大化する

【方針】

- (1) では原点から平面へ下ろした垂線の足を求める。平面の法線ベクトルは $(a, 1, 1)$ なので、最短点は $\lambda(a, 1, 1)$ とおける。
- (2) では、半径 3 の球を平面で切った小さい方の体積は、原点から平面までの距離 d が大きいほど小さくなる。したがってまず $d^2 = \frac{(a-2)^2}{a^2+2}$ を最大にし、得られた d から球冠の高さ $h = 3 - d$ と体積を計算する。

【解答】

- (1) 平面 $ax + y + z + a - 2 = 0$ の法線ベクトルは $(a, 1, 1)$ である。原点に最も近い平面上の点は、原点からこの法線方向に進んだ点なので $(x, y, z) = \lambda(a, 1, 1)$ とおける。これを平面の式に代入すると $a(\lambda a) + \lambda + \lambda + a - 2 = 0$ すなわち $\lambda(a^2 + 2) + a - 2 = 0$ である。したがって $\lambda = \frac{2-a}{a^2+2}$ である。よって求める点は

$$\left(\frac{a(2-a)}{a^2+2}, \frac{2-a}{a^2+2}, \frac{2-a}{a^2+2} \right)$$

である。

- (2) 原点から平面までの距離を d とする。距離の公式より $d = \frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+2}}$ である。球の中心は原点で半径は 3 であるから、平面が中心から遠いほど小さい方の部分の体積は小さくなる。したがって d を最大にすればよい。 d の最大化は $d^2 = \frac{(a-2)^2}{a^2+2}$ の最大化と同じである。これを $R(a)$ とおくと $R(a) = \frac{(a-2)^2}{a^2+2}$ であり、微分して

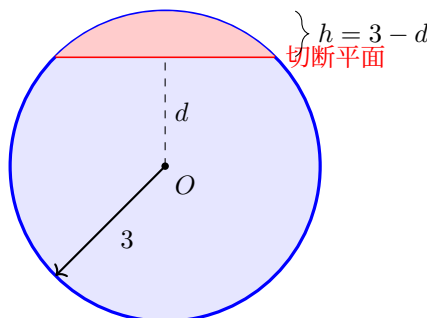
$$\begin{aligned} R'(a) &= \frac{2(a-2)(a^2+2) - 2a(a-2)^2}{(a^2+2)^2} \\ &= \frac{4(a-2)(a+1)}{(a^2+2)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって増減を調べると、 $R(a)$ は $a = -1$ で最大となる。実際 $R(-1) = \frac{9}{3} = 3$ であり、 $a \rightarrow \pm\infty$ では $R(a) \rightarrow 1$ 、 $a = 2$ では $R(a) = 0$ である。よって最大距離は $d = \sqrt{3}$ で、このとき $a = -1$ である。

半径 3 の球を、中心から距離 d の平面で切る。小さい方の部分は高さ $h = 3 - d$ の球冠である。半径 3 の球の球冠の体積は $\pi h^2 \left(3 - \frac{h}{3} \right)$ である。ここで $d = \sqrt{3}$ だから $h = 3 - \sqrt{3}$ である。したがって

$$\begin{aligned} V_{\min} &= \pi(3 - \sqrt{3})^2 \left(3 - \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \pi(18 - 8\sqrt{3}). \end{aligned}$$

以上より $a = -1$, $V_{\min} = \pi(18 - 8\sqrt{3})$ である。



▶ 解法 2：平方の非負性と断面積を使う

【方針】

平面までの距離の最大値は、平方の非負性だけで評価する。球冠の体積は公式に頼らず、球の円形断面を表示積分して求める。

【解答】

(1) 平面の法線方向は $(a, 1, 1)$ であるから、最短点を $\lambda(a, 1, 1)$ とおく。平面の式へ代入して

$$\lambda(a^2 + 2) + a - 2 = 0$$

を得る。したがって

$$\lambda = \frac{2 - a}{a^2 + 2}$$

であり、最短点は

$$\left(\frac{a(2 - a)}{a^2 + 2}, \frac{2 - a}{a^2 + 2}, \frac{2 - a}{a^2 + 2} \right)$$

である。

(2) 原点から平面までの距離を d とすると

$$d^2 = \frac{(a - 2)^2}{a^2 + 2}.$$

ここで

$$3(a^2 + 2) - (a - 2)^2 = 2(a + 1)^2 \geq 0$$

だから $d^2 \leq 3$ であり、等号は $a = -1$ のときに成り立つ。小さい方の球冠は平面が中心から遠いほど小さいので、 $a = -1, d = \sqrt{3}$ のときに体積が最小となる。

法線方向を z 軸とみなすと、高さ z における球の断面積は

$$\pi(9 - z^2)$$

である。小さい球冠は $\sqrt{3} \leq z \leq 3$ に対応するから

$$\begin{aligned} V_{\min} &= \pi \int_{\sqrt{3}}^3 (9 - z^2) dz \\ &= \pi \left[9z - \frac{z^3}{3} \right]_{\sqrt{3}}^3 \\ &= \pi(18 - 8\sqrt{3}). \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 7、目安時間 25 分。平面までの距離を微分と平方の非負性で最大化し、どちらも $a = -1, d = \sqrt{3}$ を得た。球冠体積は公式と円形断面の表示積分で照合した。小さい方の体積が距離の増加とともに減る向きを取り違えない。

【第 6 問】

A, B, C 3 人がいて、それぞれ、赤札と白札を 1 枚ずつ持っている。この状態から出発して、次のような札の移動を何回か行う。

各回の移動では、 A は B に、 B は C に、 C は A に、持っている 2 枚の札のうち 1 枚を無作為に選んで、同時に渡す。

- (1) 何回かの移動の後起こりうる札の状態を全部書き上げ、それらに $F_0, F_1, F_2, \dots$ というように記号をつけよ。ただし、最初の状態には F_0 をつけよ。
- (2) 上で得た各状態 F_i から 1 回の移動で F_j になる確率 p_{ij} をそれぞれ求めよ。
- (3) 最初の状態から n 回移動したとき、 F_0 の状態にかえっている確率 q_n を求めよ。

▶ 解法 1：7 状態の遷移を直接調べる

【方針】

各人が持つ赤札の枚数を (r_A, r_B, r_C) で表す。赤札は全部で 3 枚、各人は常に 2 枚持つので、起こりうる赤札枚数は $(1, 1, 1)$ と $(2, 1, 0)$ の並べ替えだけである。(2) では $F_0 = (1, 1, 1)$ からは 8 通りの渡し方を数え、その他の状態では赤札 2 枚の人と 0 枚の人の行動が決まり、赤札 1 枚の人だけが確率 $\frac{1}{2}$ で分岐することを使う。(3) では、非初期状態のどれからでも F_0 へ戻る確率が $\frac{1}{2}$ であるため、 $q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}(1 - q_n)$ に集約する。

【解答】

(1) 状態を、 A, B, C が持っている赤札の枚数の三つ組 (r_A, r_B, r_C) で表す。赤札は全部で 3 枚であり、各人はいつも 2 枚の札を持っているので、各成分は 0, 1, 2 のいずれかで、和は 3 である。したがって可能な形は $(1, 1, 1)$ または $(2, 1, 0)$ の並べ替えである。

最初の状態を $F_0 = (1, 1, 1)$ とする。残りの 6 状態を、移動の向きに沿って $F_1 = (2, 1, 0)$, $F_2 = (1, 2, 0)$, $F_3 = (0, 2, 1)$, $F_4 = (0, 1, 2)$, $F_5 = (1, 0, 2)$, $F_6 = (2, 0, 1)$ と名づける。これで起こりうる状態はすべてである。

(2) まず $F_0 = (1, 1, 1)$ から考える。この状態では 3 人とも赤札 1 枚、白札 1 枚を持っているので、それぞれ赤を渡すか白を渡すかが確率 $\frac{1}{2}$ ずつである。3 人の選び方は全部で $2^3 = 8$ 通りである。

3 人が全員赤を渡す場合、または全員白を渡す場合には、各人が受け取る赤札数も失う赤札数も同じなので F_0 にとどまる。この 2 通りの確率は $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ である。残り 6 通りは、 $F_1, \dots, F_6$ のいずれかに 1 通りずつ移る。したがって

$$p_{00} = \frac{1}{4}, \quad p_{0j} = \frac{1}{8} \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \text{ である。}$$

次に $F_1, \dots, F_6$ からの移動を考える。これらの状態では、赤札を 2 枚持つ人は必ず赤札を渡し、赤札を 0 枚持つ人は必ず白札を渡す。赤札を 1 枚持つ人だけが、赤札を渡すか白札を渡すかで 2 通りに分かれる。したがって各状態からの分岐は確率 $\frac{1}{2}$ ずつである。

例えば $F_1 = (2, 1, 0)$ では、 A は必ず赤を渡し、 C は必ず白を渡す。 B が赤を渡せば全員が赤 1 枚ずつになり F_0 へ移る。 B が白を渡せば $(1, 2, 0) = F_2$ へ移る。よって $p_{10} = p_{12} = \frac{1}{2}$ である。同様に

$$p_{20} = p_{23} = \frac{1}{2}, \quad p_{30} = p_{34} = \frac{1}{2}, \quad p_{40} = p_{45} = \frac{1}{2},$$

さらに

$$p_{50} = p_{56} = \frac{1}{2}, \quad p_{60} = p_{61} = \frac{1}{2}$$

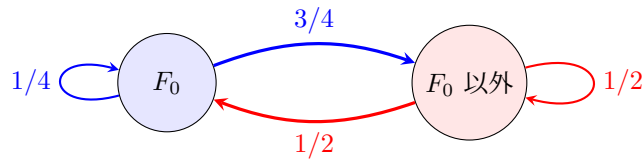
であり、ここに書いたもの以外の p_{ij} はすべて 0 である。

(3) 最初の状態から n 回移動した後に F_0 にいる確率を q_n とする。最初は F_0 にいるので $q_0 = 1$ である。

(2) より、現在 F_0 にいるとき、次に F_0 にいる確率は $\frac{1}{4}$ である。一方、現在 F_0 以外のどの状態にいても、次に F_0 に移る確率は $\frac{1}{2}$ である。したがって $q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}(1 - q_n)$ である。整理すると $q_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}q_n$ である。

この漸化式の一定値を L とすると $L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}L$ だから $L = \frac{2}{5}$ である。よって $q_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}\left(q_n - \frac{2}{5}\right)$ である。 $q_0 = 1$

より $q_0 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ だから $q_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ である。



7 状態を 2 群へまとめても確率は閉じる

▶ 解法 2：7 状態を二つの群へまとめる

【方針】

全員が赤白 1 枚ずつの状態を U 、それ以外の 6 状態をまとめて V とする。六つの状態の対称性を使って二群間の確率だけを数え、定常値との差を等比数列にする。

【解答】

(1) 各人の赤札枚数で状態を表すと、可能なのは

$$F_0 = (1, 1, 1)$$

と、 $(2, 1, 0)$ の 6 個の並べ替えだけである。これらを順に $F_1, \dots, F_6$ と名づければよい。

(2) F_0 では 3 人がそれぞれ赤か白を確率 $1/2$ で渡す。8 通り中、全員赤または全員白の 2 通りで F_0 に戻るから

$$p_{00} = \frac{1}{4}.$$

残る 6 通りは $F_1, \dots, F_6$ へ 1 通りずつ移るので

$$p_{0j} = \frac{1}{8} \quad (1 \leq j \leq 6).$$

F_0 以外では、赤 2 枚の人と赤 0 枚の人が渡す色は決まり、赤 1 枚の人だけが二分する。その一方は F_0 へ、他方は次の非初期状態へ移るので、各行の非零確率は $1/2, 1/2$ である。

(3) F_0 を群 U 、残る 6 状態を群 V とまとめる。上の結果から

$$U \rightarrow U : \frac{1}{4}, \quad U \rightarrow V : \frac{3}{4}, \quad V \rightarrow U : \frac{1}{2}, \quad V \rightarrow V : \frac{1}{2}.$$

n 回後に U にいる確率を q_n とすると

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}(1 - q_n).$$

定常値 $2/5$ との差を $s_n = q_n - 2/5$ とおけば

$$s_{n+1} = -\frac{1}{4}s_n, \quad s_0 = \frac{3}{5}.$$

したがって

$$q_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^n.$$

【総評】 難度 7、計算量 7、目安時間 25 分。7 状態を全て列挙する方法と、対称な 6 状態を一群にまとめる方法で遷移を確認した。非初期状態のどこからも F_0 へ戻る確率が $1/2$ であることが一次漸化式への集約点である。確率母関数や行列は用いていない。