

京都大学 1990 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

曲線 $y = x^4 - 6x^2$ に、点 (a, b) を通る 4 つの接線が引けるのは、 (a, b) がどのような範囲にあるときか、図示せよ。

【方針】

接点の x 座標を t として、点 (a, b) を通る接線の条件を t の四次方程式にする。四本の接線が引けることは、その方程式が相異なる四実根を持つことと同値である。右辺を t の関数と見て、三つの極値 $t = -1, 1, a$ の高さを比較する。

【解答】

接点を $(t, t^4 - 6t^2)$ とすると、接線は

$$y = (4t^3 - 12t)x - 3t^4 + 6t^2$$

である。これが (a, b) を通る条件は

$$b = \phi_a(t) := 4at^3 - 12at - 3t^4 + 6t^2$$

である。したがって四本の接線が引けるための必要十分条件は、水平線 $y = b$ が $y = \phi_a(t)$ と相異なる四点で交わることである。

微分すると

$$\phi'_a(t) = -12(t - a)(t - 1)(t + 1).$$

また

$$\phi_a(-1) = 3 + 8a, \quad \phi_a(1) = 3 - 8a, \quad \phi_a(a) = a^4 - 6a^2$$

である。三つの停留点を左から並べると、外側の二点が極大、中央が極小になる。よって求める範囲は次の開領域である。

$$\begin{cases} 3 + 8a < b < \min\{a^4 - 6a^2, 3 - 8a\}, & a < -1, \\ a^4 - 6a^2 < b < 3 - 8|a|, & -1 < a < 1, \\ 3 - 8a < b < \min\{a^4 - 6a^2, 3 + 8a\}, & a > 1. \end{cases}$$

境界上では重解が生じるため含まない。また $a = \pm 1$ では停留点が重なり、四つの相異なる接点は得られない。

図示すると、境界は二直線 $b = 3 + 8a$, $b = 3 - 8a$ と四次曲線 $b = a^4 - 6a^2$ からなる。上側境界の切替点は $a = -3, 0, 3$ であり、上の不等式で指定された各帯状部分を塗ればよい。

【総評】 目安は 35 分。四接線を四次方程式の四実根に読み替える発想が最重要である。極値の大小比較では、停留点の順序が $a < -1, -1 < a < 1, a > 1$ で変わる。境界を含めると同じ接線を重複して数えるので、すべて厳密不等号にすることが採点上の要点。

【第 2 問】

$f(x) = \frac{a - \cos x}{x^2}$ が $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で増加関数となるような定数 a のうち最大のものを求めよ.

【方針】

$f'(x) \geq 0$ を a の上限条件に直す。すべての x で成り立つ最大の a は、 $g(x) = \cos x + \frac{x}{2} \sin x$ の最小値である。 $g'(x)$ の符号は $\tan x > x$ を微分で示せば決まる。

【解答】

$$f'(x) = \frac{x \sin x - 2(a - \cos x)}{x^3} = \frac{2(\cos x + \frac{x}{2} \sin x - a)}{x^3}.$$

したがって f が増加関数となる条件は

$$a \leq g(x) := \cos x + \frac{x}{2} \sin x \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

がすべての x で成り立つことである。

ここで

$$g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{2}.$$

$h(x) = \sin x - x \cos x$ とおけば $h'(x) = x \sin x > 0$ 、 $h(0) = 0$ であるから、 $x > 0$ では $h(x) > 0$ である。よって $g'(x) < 0$ であり、 g は区間全体で減少する。

したがって

$$\inf_{0 < x \leq \pi/2} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$a = \frac{\pi}{4}$ のとき $f'(x) > 0$ ($0 < x < \pi/2$) で、端点では $f'(\pi/2) = 0$ となるので条件を満たす。以上より最大値は

$$a = \frac{\pi}{4}$$

である。

【総評】 目安は 15 分。微分後に「各 x での上限」から「その最小値」へ移る論理が得点の核である。 $\tan x > x$ を既知として済ませず、 $\sin x - x \cos x$ の増加で一行証明すると答案が閉じる。端点で導関数が 0 でも増加性を失わないことも確認する。

【第 3 問】

関数 $y = \log x$ のグラフ上の 1 点 $P(s, \log s)$ ($s \geq 1$) における接線と y 軸の交点を Q とする. グラフ上に定点 $A(1, 0)$ をとる. AP 間のグラフの長さを $\widehat{AP}$, 線分 PQ の長さを $\overline{PQ}$ とし, $t = \overline{PQ} - \widehat{AP}$ とする.
 t は s の関数である.

- (1) $\frac{dt}{ds}$ を s で表わせ.
- (2) $u = \frac{1}{s}$, $v = \sqrt{1+u^2}$ とおくと, $\frac{du}{dt}$ および $\frac{dv}{dt}$ を u の関数として表わせ.
- (3) u を t の関数として表わせ.

【方針】

接線の y 切片から PQ を求め、弧長は微小区間の長さを積分して表す。(1) の差は大きく約分される。(2) では $u = 1/s$ に直すと $du/dt = v$, $dv/dt = u$ という対称な連立関係になるので、 $u+v$ と $v-u$ を別々に解く。

【解答】

(1)

点 P における接線は $y - \log s = \frac{1}{s}(x - s)$ であるから $Q = (0, \log s - 1)$ である。よって $\overline{PQ} = \sqrt{s^2 + 1}$ であり、

$$\widehat{AP} = \int_1^s \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx.$$

したがって

$$\frac{dt}{ds} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} = -\frac{1}{s\sqrt{s^2 + 1}}.$$

(2)

$u = 1/s$, $v = \sqrt{1+u^2}$ とすると

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{u^2}{v}, \quad \frac{du}{ds} = -u^2.$$

よって

$$\frac{du}{dt} = v.$$

また $\frac{dv}{du} = \frac{u}{v}$ であるから

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u}{v} \frac{du}{dt} = u.$$

(3)

$s = 1$ のとき $u = 1$, $v = \sqrt{2}$, $t = \sqrt{2}$ である。(2) より

$$\frac{d}{dt}(u+v) = u+v, \quad \frac{d}{dt}(v-u) = -(v-u).$$

したがって

$$u+v = (1+\sqrt{2})e^{t-\sqrt{2}}, \quad v-u = (\sqrt{2}-1)e^{-(t-\sqrt{2})}.$$

両式の差を取ると

$$u(t) = \frac{1}{2} \left\{ (1+\sqrt{2})e^{t-\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)e^{-(t-\sqrt{2})} \right\}.$$

【総評】 目安は 25 分。(1) で弧長の微分をそのまま使い、二つの根号を同じ形に直す計算が第一の得点源である。(2) の対称形を見落として直接二階微分に進むと長くなる。初期値は $s = 1$ で弧長が 0、 $PQ = \sqrt{2}$ であることを必ず確認する。

【第 4 問】

座標空間に 3 点 P, Q, R があって毎秒 1 の速さで、それぞれ

点 P は原点 $(0, 0, 0)$ を出発して x 軸上を正の方向へ、

点 Q は点 $(2, 0, 0)$ を出発して y 軸と平行に正の方向へ、

点 R は点 $(2, 2, 0)$ を出発して z 軸と平行に正の方向へ

進む。このとき三角形 PQR の面積 S が最小となるのは何秒後か。

【方針】

出発後 t 秒の座標を置き、二辺ベクトルから面積の二乗を求める。式は t と $2-t$ に対称なので、 $p = t(2-t)$ を導入すると二次式になり、時間の範囲 $t \geq 0$ で直ちに最小化できる。

【解答】

t 秒後には

$$P = (t, 0, 0), \quad Q = (2, t, 0), \quad R = (2, 2, t)$$

である。 $\overrightarrow{PQ} = (2-t, t, 0)$ 、 $\overrightarrow{PR} = (2-t, 2, t)$ より、三角形の面積 S は

$$4S^2 = t^4 + t^2(2-t)^2 + (2-t)^4$$

を満たす。

$p = t(2-t)$ とおくと $t + (2-t) = 2$ なので

$$4S^2 = \{t^2 + (2-t)^2\}^2 - t^2(2-t)^2 = 16 - 16p + 3p^2.$$

$t \geq 0$ に対して $p = t(2-t) \leq 1$ である。また $3p^2 - 16p + 16$ は $p \leq 1$ で減少するから、 p が最大るとき S は最小になる。 $p = 1$ は $t = 1$ のときである。

よって求める時刻は

1秒後

である。

【総評】 目安は 15 分。面積の二乗まで正しく作れば大半の得点になる。四次式をそのまま微分するより、 t と $2-t$ の対称性から $p = t(2-t)$ を使う方が短い。 $t \geq 0$ で $p \leq 1$ となる点と、等号が $t = 1$ である点を明記する。

【第 5 問】

平面上に 2 つの円 C, C' がある。1 次変換 f は逆変換をもち、かつ C を C' にうつしている。

(1) l を C 上の 1 点 P における接線とする。このとき l の f による像 l' は点 $f(P)$ における C' の接線である。この理由を述べよ。

(2) A を C の中心とすれば、 $f(A)$ は C' の中心となる。この理由を述べよ。

【方針】

逆変換を持つ 1 次変換は、点と直線の交わり方を一対一に保ち、さらに中点を中点へ移す。(1) は「接線が円とただ一つの共有点を持つ」ことを像に移す。(2) は円の中心に関する点対称性を像に移し、円の点対称の中心が一意であることを使う。

【解答】

(1)

f は逆変換を持つので一対一であり、直線を直線へ移す。接線 l と円 C の共有点は P だけである。もし $l' = f(l)$ と $C' = f(C)$ が $f(P)$ 以外の点 Y も共有すれば、 $f^{-1}(Y)$ は l と C の P 以外の共有点になり矛盾する。したがって l' と C' の共有点は $f(P)$ だけであり、 l' は C' の $f(P)$ における接線である。

(2)

X を C 上の任意の点とすると、中心 A に関して反対側の点 $X' = 2A - X$ も C 上にある。1 次変換は和と定数倍を保つので

$$f(X') = 2f(A) - f(X).$$

よって C' は $f(A)$ に関して点対称である。円を点対称に移して不変にする点はその中心だけであるから、 $f(A)$ は C' の中心である。

【総評】 目安は 12 分。計算問題ではなく、逆変換が保証する一対一性と、1 次変換が中点を保つことを言葉で正確に使う論証問題である。(1) で「直線が直線に移る」だけでは接線性の証明にならない。共有点が一つであることまで逆像を使って示す。

【第 6 問】

n 本のくじの中に 1 本だけ当たりくじがある。このくじを無作為に 1 本ひき、ひいたくじをもとに戻すという試行を l 回くり返す。 l 回のうち当たった回数を X とする。確率変数 X_i ($1 \leq i \leq l$) を次により定める。

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{回目に当たりくじがでたとき,} \\ 0 & i\text{回目に当たりくじがでないとき.} \end{cases}$$

- (1) 確率変数 X を X_i ($1 \leq i \leq l$) で表わせ。
- (2) X^2 の期待値 $E(X^2)$ を求めよ。
- (3) $E(X^2) > 2$ となる最小の l は何か。

【方針】

当たり回数は各回の指示変数の和である。二乗を展開すると $X_i^2 = X_i$ であり、異なる回の積の期待値は独立性から $1/n^2$ になる。(3) は得られた式が l に関して増加することを用い、 $l = n$ と $l = n + 1$ を比較する。

【解答】

(1)

各回の当たりを足せばよいので

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_l.$$

(2)

$X_i^2 = X_i$ であり、 $E(X_i) = 1/n$ である。また $i \neq j$ のとき各回は独立だから $E(X_i X_j) = 1/n^2$ である。したがって

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left(\sum_{i=1}^l X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq l} X_i X_j\right) \\ &= \frac{l}{n} + 2 \cdot \frac{l(l-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{l}{n} + \frac{l(l-1)}{n^2}. \end{aligned}$$

(3)

(2) の式は自然数 l に関して増加する。 $l = n$ のとき

$$E(X^2) = 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

一方、 $l = n + 1$ のとき

$$E(X^2) = \frac{n+1}{n} + \frac{n(n+1)}{n^2} = 2 + \frac{2}{n} > 2.$$

よって条件を満たす最小の l は

$$l = n + 1$$

である。

【総評】 目安は 15 分。二乗の展開で交差項に係数 2 が付くこと、組の個数が $l(l-1)/2$ であることが採点点になる。 $E(X)^2$ と $E(X^2)$ を混同しない。最後は二次不等式を解くより $l = n, n + 1$ を比較すると簡潔である。