

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1990 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

2つの曲線 $y = x^3 - x$ と $y = x^2 - a$ が1点 P を通り、 P において共通の接線をもっている。
この2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

第 2 問

三角形 ABC において、 $\angle B = 60^\circ$ 、 B の対辺の長さ b は整数、他の 2 辺の長さ a 、 c はいずれも素数である。このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

第 3 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を f , $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を g とする.

- (1) どんなベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対しても, 内積の間に $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot g(\vec{v})$ の関係が成り立つことを示せ.
- (2) f が原点 O を通る直線 l をそれ自身にうつすとする. l 上に O と異なる点 P をとり, P の f による像を Q , g による像を R とする. このとき, 次の (イ)(ロ) のいずれかが成り立つことを示せ.
- (イ) $Q = R$
- (ロ) 3 点 Q , R , O は直角三角形の頂点となる.

第 4 問

半径 1 , $1 - 2r$ の同心円の間に半径 r の円が n 個, 互いに交わずに入っているという状態を考える. $n (\geq 2)$ を固定した上で, r を変化させる.

- (1) r は $0 < r \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$ の範囲になければならないことを示せ.
- (2) これら $n + 2$ 個の円の面積の総和が最小となる r の値を求めよ.

第 5 問

正 N 角形の頂点に $0, 1, \dots, N-1$ と時計まわりに番号がつけてある．頂点 0 を出発点とし，サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を X とする．次にもう 1 度サイコロを投げて出た目の数だけ，頂点 X から時計まわりに移動し，着いた頂点の番号を Y とする．このようにして定めた確率変数 X, Y について

- (1) $N = 5, 6$ のそれぞれの場合について， X と Y は互いに独立か．
- (2) X, Y が互いに独立となる N ($N \geq 3$) をすべて求めよ．

ただし確率変数 X, Y が互いに独立であるとは， $X = i$ となる確率 $P(X = i)$ と $X = i$ かつ $Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ との間に，次の等式 $(*)$ が任意の i, j ($0 \leq i, j \leq N-1$) について成り立つことである．

$$(*) \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$

第 6 問

円 $C : x^2 + y^2 = 1$ を内部に含む楕円 $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) がある. D 上の 1 点 $P(0, b)$ から C に 1 つの接線をひき, その延長が再び D と交わる点を Q とする. Q から C に PQ とは異なる接線をひき, その延長が再び D と交わる点を R とする. R から C に QR と異なる接線をひき, その延長が再び D と交わる点を S とすると, $S = P$ となった. このとき a を b の関数として表わせ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)