

京都大学 1990 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

2 つの曲線 $y = x^3 - x$ と $y = x^2 - a$ が 1 点 P を通り、 P において共通の接線をもっている。この 2 つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

【方針】

共通接線をもつ点の x 座標を t とし、関数値と微分係数の一致から接点候補を求める。理系の設問では a の符号条件がないため、 $t = 1$ と $t = -\frac{1}{3}$ の二通りを両方扱う。各場合で差の式が接点を重解にもつことを使い、囲まれる区間と上下関係を確認して面積を求める。

【解答】

接点 P の x 座標を t とする。2 曲線が P を通り、そこで接線を共有するので $t^3 - t = t^2 - a$, $3t^2 - 1 = 2t$ が成り立つ。後式より $3t^2 - 2t - 1 = 0$ だから $t = 1$, $t = -\frac{1}{3}$ である。また関数値の一致から $a = -t^3 + t^2 + t$ である。

まず $t = 1$ のとき $a = 1$ である。このとき 2 曲線の差は $x^3 - x - (x^2 - 1) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$ である。囲まれる部分は $-1 \leq x \leq 1$ にあり、この区間で差は 0 以上である。したがって面積は

$$\int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx = \frac{4}{3}$$

である。

次に $t = -\frac{1}{3}$ のとき $a = -\frac{5}{27}$ である。このとき $x^3 - x - (x^2 + \frac{5}{27}) = \frac{1}{27}(3x - 5)(3x + 1)^2$ である。交点の x 座標は $-\frac{1}{3}$ と $\frac{5}{3}$ で、 $-\frac{1}{3}$ は接点に対応する重解である。区間 $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$ では $3x - 5 \leq 0$ だから、上の差は 0 以下である。よって面積は

$$- \int_{-1/3}^{5/3} \left\{ x^3 - x - \left(x^2 + \frac{5}{27} \right) \right\} dx$$

である。計算すると

$$- \int_{-1/3}^{5/3} \frac{1}{27} (3x - 5)(3x + 1)^2 dx = \frac{4}{3}$$

となる。

どちらの場合も面積は同じなので、求める面積は $\frac{4}{3}$ である。

別解。差の式を一般に見ると、接点 t は重解である。差を $F(x) = x^3 - x - (x^2 - a)$ とおくと、 $F(t) = 0$, $F'(t) = 0$ であり、もう一つの根を s とすると、3 次式の根の和から $2t + s = 1$ である。候補 $t = 1, -\frac{1}{3}$ に対し、いずれも $|s - t| = 2$ となる。したがって平行移動して区間を長さ 2 に直せば、面積は

$$\int_0^2 u^2(2 - u) du = \frac{4}{3}$$

となり、同じ結果を得る。

【総評】 難度 5、計算量 4。文系第 1 問から $a > 0$ の条件を外した形で、接点候補を二つとも処理する必要がある。想定時間は 20 分程度。一方の候補だけで終わると不十分だが、二つの場合の面積が等しくなるため、重解ともう一つの交点の位置を整理できると計算を短くできる。符号確認をしてから絶対値付きの面積に直すことが採点上の注意点である。

【第 2 問】

三角形 ABC において、 $\angle B = 60^\circ$ 、 B の対辺の長さ b は整数、他の 2 辺の長さ a, c はいずれも素数である。このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

【方針】

余弦定理から $b^2 = a^2 - ac + c^2$ を得て、 a についての 2 次方程式と見る。 a が整数であるため判別式が平方数になることを使い、 $(2b-k)(2b+k) = 3c^2$ まで因数分解する。あとは $c=2$ と c が奇素数の場合に分け、素数条件に反する因数分解を除いて、最後に $a=b=c$ だけが残ることを示す。

【解答】

角 B の両側の辺が a, c 、対辺が b であるから、余弦定理より $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ = a^2 - ac + c^2$ である。これを a について整理すると $a^2 - ca + (c^2 - b^2) = 0$ である。 a は素数なので整数であり、この 2 次方程式の判別式 $\Delta = c^2 - 4(c^2 - b^2) = 4b^2 - 3c^2$ は平方数でなければならない。そこで $4b^2 - 3c^2 = k^2$ ($k \geq 0$) とおくと $(2b-k)(2b+k) = 3c^2$ である。

まず $c=2$ の場合を考える。このとき右辺は 12 であり、 $2b-k$ と $2b+k$ は同じ偶奇で正だから、可能な組は $2b-k=2$, $2b+k=6$ だけである。よって $b=2$, $k=2$ となり、 $a = \frac{c+k}{2} = 2$ である。したがって $a=b=c=2$ である。

次に c が奇素数の場合を考える。このとき $2b-k$ と $2b+k$ はともに奇数で、積は $3c^2$ である。大小を考えて $2b-k \leq 2b+k$ とすれば、候補は $(2b-k, 2b+k) = (1, 3c^2), (3, c^2), (c, 3c)$ に限られる。 $1, 3c^2$ の場合、 $k = \frac{3c^2-1}{2}$ であるから、正の根は $a = \frac{c+k}{2} = \frac{(3c-1)(c+1)}{4}$ となる。 c は奇素数なので、右辺は 1 より大きい二つの整数の積になり、 a が素数であることに反する。 $3, c^2$ の場合も同様に $a = \frac{c+k}{2} = \frac{(c+3)(c-1)}{4}$ である。 $c > 3$ なら右辺は 1 より大きい二つの整数の積で、 a は素数でない。 $c=3$ のときはこの組は次の $(c, 3c)$ と同じである。

したがって残るのは $2b-k=c$, $2b+k=3c$ である。このとき $b=c$, $k=c$ となり、2 次方程式の根は $a = \frac{c+k}{2} = c$ である。よって $a=b=c$ が成り立つ。したがって三角形 ABC は正三角形である。

【総評】 難度 7、計算量 6。余弦定理だけで始まるが、整数条件と素数条件を判別式の因数分解に落とすところが中心である。想定時間は 25 分程度。 $c=2$ の偶数ケースと c 奇素数ケースを分けないと因数候補の偶奇を誤りやすい。答案では、候補 $(1, 3c^2), (3, c^2)$ がなぜ素数条件に反するかを明記し、最後に $a=b=c$ まで結論を閉じることが得点上重要である。

【第 3 問】

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を f , $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換を g とする。

- (1) どんなベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対しても、内積の間に $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot g(\vec{v})$ の関係が成り立つことを示せ。
- (2) f が原点 O を通る直線 l をそれ自身にうつすとする。 l 上に O と異なる点 P をとり、 P の f による像を Q , g による像を R とする。このとき、次の (イ)(ロ) のいずれかが成り立つことを示せ。
 - (イ) $Q = R$
 - (ロ) 3 点 Q, R, O は直角三角形の頂点となる。

【方針】

(1) は f と g を成分で書き、内積を直接展開して同じ式になることを確認する。(2) は P の位置ベクトルを $\vec{p}$, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{q}, \vec{r}$ とおく。 Q が直線 l 上にあるので $\vec{q}$ は $\vec{p}$ と平行であり、(1) から $(\vec{r}-\vec{q}) \cdot \vec{p} = 0$ を得る。 $Q = R$ でなければ、 QR と QO が垂直になることを示す。

【解答】

(1) $\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (s, t)$ とおく。このとき $f(\vec{u}) = (ax+by, cx+dy)$ であるから $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = (ax+by)s + (cx+dy)t$ である。一方 $g(\vec{v}) = (as+ct, bs+dt)$ より $\vec{u} \cdot g(\vec{v}) = x(as+ct) + y(bs+dt)$ である。右辺を展開するとどちらも $axs+bys+cxt+d yt$ となるので、 $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot g(\vec{v})$ が成り立つ。

(2) $\vec{p} = \overrightarrow{OP}, \vec{q} = \overrightarrow{OQ}, \vec{r} = \overrightarrow{OR}$ とおく。 P は l 上にあり、 f は直線 l をそれ自身に移すので、 Q も l 上にある。したがって $\vec{q} = \lambda \vec{p}$ と書ける。また、ここでいう「それ自身に移す」は直線全体が再び同じ直線になるという意味なので、 $P \neq O$ に

対して $Q \neq O$ である。

(1) を $\vec{u} = \vec{p}$, $\vec{v} = \vec{p}$ に用いると $f(\vec{p}) \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot g(\vec{p})$ すなわち $\vec{q} \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{r}$ である。よって $(\vec{r} - \vec{q}) \cdot \vec{p} = 0$ となる。

もし $Q = R$ なら (イ) が成り立つ。 $Q \neq R$ とする。このとき $\vec{r} - \vec{q} = \overrightarrow{QR}$ は $\vec{p}$ に垂直である。一方、 $\vec{q}$ は $\vec{p}$ と平行で、しかも $\vec{q} \neq \vec{0}$ である。したがって $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{QO}$ となり、3 点 Q, R, O は Q を直角の頂点とする直角三角形の頂点である。よって (ロ) が成り立つ。

別解。直交座標の一方の軸を直線 l に合わせて考えてもよい。この座標では $P = (p, 0)$, $p \neq 0$ とおける。 l が f によって同じ直線に移るので、行列 A の第 1 列は $(\lambda, 0)$ の形である。したがって $Q = (\lambda p, 0)$ である。一方、 B は A の行と列を入れかえた行列なので、ある数 μ を用いて $R = (\lambda p, \mu p)$ と書ける。 $\mu = 0$ なら $Q = R$ で (イ) が成り立つ。 $\mu \neq 0$ なら OQ は横方向、 QR は縦方向で互いに垂直だから、 (ロ) が成り立つ。

【総評】 難度 6、計算量 4。成分計算で得た内積の関係を、直線上の平行関係と垂直関係に読み替える問題である。想定時間は 22 分程度。(2) では、 $\vec{q}$ が $\vec{p}$ に平行で、 $\vec{r} - \vec{q}$ が $\vec{p}$ に垂直という二つの事実を混同しないことが大切である。 $Q = R$ の場合を先に分け、そうでない場合だけ直角三角形を作ると、論理の抜けが少ない。

【第 4 問】

半径 1, $1 - 2r$ の同心円の間に半径 r の円が n 個、互いに交わらずに入っているという状態を考える。 $n (\geq 2)$ を固定した上で、 r を変化させる。

(1) r は $0 < r \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$ の範囲になければならないことを示せ。

(2) これら $n + 2$ 個の円の面積の総和が最小となる r の値を求めよ。

【方針】

半径 r の各小円は、外側の半径 1 の円と内側の半径 $1 - 2r$ の円の間にちょうど収まるので、中心は共通中心から距離 $1 - r$ の円周上にある。 n 個の中心のうち隣り合う中心角が $2\pi/n$ 以下の組を取り、中心間距離が少なくとも $2r$ 必要であることから上限を出す。面積和は r の 2 次式なので、頂点 $r = 2/(n + 4)$ が制約範囲内にあることを確認して最小値の位置を決める。

【解答】

(1) 半径 r の円が半径 1 の円の内側に入り、同時に半径 $1 - 2r$ の円の外側に入るには、その中心は共通中心から距離 $1 - r$ の円周上になければならない。実際、外側の円に内接すると中心距離は $1 - r$ であり、このとき内側の円との距離も $(1 - r) - (1 - 2r) = r$ となる。

この円周上に n 個の中心を置く。中心角を一周分足すと 2π なので、隣り合う中心の中に、中心角が $2\pi/n$ 以下である組が少なくとも一つある。その 2 点間の距離は高々 $2(1 - r) \sin \frac{\pi}{n}$ である。

小円どうしが交わらないためには、どの 2 中心間距離も少なくとも $2r$ でなければならない。したがって $2r \leq 2(1 - r) \sin \frac{\pi}{n}$ である。これを解くと $0 < r \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$ を得る。

(2) $n + 2$ 個の円の面積の総和を $S(r)$ とする。半径は 1, $1 - 2r$ 、そして r が n 個であるから $\frac{S(r)}{\pi} = 1 + (1 - 2r)^2 + nr^2$ である。整理すると $\frac{S(r)}{\pi} = (n + 4)r^2 - 4r + 2$ であり、これは $r = \frac{2}{n + 4}$ で最小となる 2 次式である。

あとはこの値が (1) の範囲に入ることを確認する。 $0 < \pi/n \leq \pi/2$ であり、この範囲では $\sin \frac{\pi}{n} \geq \frac{2}{n}$ が成り立つ。よって $(n + 2) \sin \frac{\pi}{n} \geq (n + 2) \frac{2}{n} = 2 + \frac{4}{n} > 2$ である。一方、 $\frac{2}{n + 4} \leq \frac{s}{1 + s}$ ($s > 0$) は $2 \leq (n + 2)s$ と同値である。ここで $s = \sin \frac{\pi}{n}$ とすれば、上の不等式により確かに成り立つ。

したがって 2 次式の頂点は許される範囲内にあり、面積の総和が最小となるのは $r = \frac{2}{n + 4}$ のときである。

【総評】 難度 6、計算量 5。配置条件を中心の円周上の問題に変換し、そのあと 2 次関数の最小化に移る問題である。想定時間は 23 分程度。(1) では、 n 個の中心すべての間隔を直接扱うのではなく、隣り合う中心角の最小が $2\pi/n$ 以下であることを使うのが要点である。(2) では頂点を出すだけでなく、その r が (1) の制約範囲内にあることを確認しないと答案が完結しない。

【第 5 問】

正 N 角形の頂点に $0, 1, \dots, N-1$ と時計まわりに番号がつけてある。頂点 0 を出発点とし、サイコロを投げて出た目の数だけ頂点を時計まわりに移動し、着いた頂点の番号を X とする。次にもう 1 度サイコロを投げて出た目の数だけ、頂点 X から時計まわりに移動し、着いた頂点の番号を Y とする。このようにして定めた確率変数 X, Y について

- (1) $N = 5, 6$ のそれぞれの場合について、 X と Y は互いに独立か。
 (2) X, Y が互いに独立となる N ($N \geq 3$) をすべて求めよ。

ただし確率変数 X, Y が互いに独立であるとは、 $X = i$ となる確率 $P(X = i)$ と $X = i$ かつ $Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ との間に、次の等式 (*) が任意の i, j ($0 \leq i, j \leq N-1$) について成り立つことである。

$$(*) \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$

【方針】

出目を法 N の剰余として数え、独立性は条件付き確率で判定する。 $N = 5$ は $(X, Y) = (1, 2)$ の一組で等式が破れることを示し、 $N = 6$ と $N = 3$ は 1 回の出目の剰余が一樣であることから独立性を示す。残る $N = 4$ と $N \geq 7$ では、それぞれ具体的な一組を選んで独立条件が破れることを示し、全体を分類する。

【解答】

(1) まず $N = 5$ を考える。 $X = 1$ となるのは、1 回目の出目が 1 または 6 のときなので $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。また $Y = 2$ となるには、2 回の出目の和が 5 で割って 2 余ればよい。和が 2、7、12 となる出方はそれぞれ 1、6、1 通りで、合計 8 通りである。したがって $P(Y = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ である。

一方、 $X = 1$ かつ $Y = 2$ となるには、1 回目の出目も 2 回目の出目も 5 で割って 1 余ればよい。これは $2 \cdot 2 = 4$ 通りなので $P(X = 1, Y = 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ である。しかし $P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$ であり、 $\frac{1}{9}$ と等しくない。よって $N = 5$ では独立でない。

次に $N = 6$ を考える。1 回の出目は法 6 で $0, 1, 2, 3, 4, 5$ の各剰余を一樣にとる。したがって $X = i$ が与えられても、2 回目の出目の剰余を加えた Y は各値を確率 $1/6$ でとる。よって任意の i, j について $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$ が成り立つ。したがって $N = 6$ では独立である。

(2) $N = 3$ のとき、1 回の出目の剰余は $0, 1, 2$ の各値を 2 通りずつとるので一樣である。 $N = 6$ の場合と同じ理由で、 X, Y は独立である。 $N = 4$ のとき、 $X = 0$ となるのは 1 回目の出目が 4 のときだけなので $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ である。また $Y = 0$ となるには 2 回の出目の和が 4、8、12 のいずれかであり、出方は $3 + 5 + 1 = 9$ 通りである。よって $P(Y = 0) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ である。一方、 $X = 0, Y = 0$ となるには 1 回目も 2 回目も 4 でなければならないので $P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{36}$ である。これは $P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ と等しくない。したがって $N = 4$ では独立でない。 $N = 5$ は (1) で独立でないことを示した。

最後に $N \geq 7$ とする。このとき $X = 1$ となるには 1 回目の出目が 1 であるしかない。したがって $X = 1$ が分かっているもとで $Y = 2$ となるには、2 回目の出目が 1 であればよいから $P(Y = 2 | X = 1) = \frac{1}{6}$ である。

一方、 $Y = 2$ となる出方を数えると、2 回の出目の和が 2 または $N + 2$ になる場合である。 $N = 7$ では和 2 が 1 通り、和 9 が 4 通りで、合計 5 通りである。 $N \geq 8$ ではこれ以下である。したがって $P(Y = 2) \leq \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$ である。よって $P(Y = 2 | X = 1) \neq P(Y = 2)$ となり、 $N \geq 7$ では独立でない。

以上より、 X, Y が独立となる $N \geq 3$ は $N = 3, 6$ である。

【総評】 難度 7、計算量 6。剰余分布の一樣性がある場合だけ独立になり、そうでない場合は具体的な一組で独立条件を破る、という方針を貫くと整理しやすい。想定時間は 28 分程度。 $N = 5$ と $N = 4$ は反例の確率計算、 $N \geq 7$ は条件付き確率 $P(Y = 2 | X = 1)$ と周辺確率 $P(Y = 2)$ の不一致が得点源である。小さい N と大きい N を混せて論じると漏れやすいので、場合分けを明確に書きたい。

【第 6 問】

円 $C: x^2 + y^2 = 1$ を内部に含む楕円 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) がある. D 上の 1 点 $P(0, b)$ から C に 1 つの接線をひき、その延長が再び D と交わる点を Q とする. Q から C に PQ とは異なる接線をひき、その延長が再び D と交わる点を R とする. R から C に QR と異なる接線をひき、その延長が再び D と交わる点を S とすると、 $S = P$ となった. このとき a を b の関数として表わせ.

【方針】

単位円の接線を法線形で表す. まず $P(0, b)$ から引ける 2 本の接線を、 $m = \sqrt{b^2 - 1}$ を用いて対称に書く. 第三の接線を一般形 $ux + vy = 1$ 、 $u^2 + v^2 = 1$ とおき、これが最初の 2 本の接線と交わる 2 点を楕円の式に代入する. 二つの代入式を比較して第三接線が水平に限られることを出し、 $y = 1$ と $y = -1$ のうち円を内部に含む条件に合う方を選ぶ.

【解答】

楕円 D が単位円 C を内部に含むので $a \geq 1$, $b > 1$ である. $b = 1$ では P が単位円上にあり、接線の取り方が問題の状況に合わないため、以下 $b > 1$ とする.

単位円の接線は $ux + vy = 1$, $u^2 + v^2 = 1$ と表せる. ここで $m = \sqrt{b^2 - 1}$ とおく. 点 $P(0, b)$ を通る単位円の 2 本の接線は $L_1: \frac{m}{b}x + \frac{1}{b}y = 1$, $L_2: -\frac{m}{b}x + \frac{1}{b}y = 1$ である. 実際、どちらも P を通り、原点からの距離が 1 である.

第三の接線を $L: ux + vy = 1$, $u^2 + v^2 = 1$ とおく. この接線は L_1, L_2 とは異なる. L_1 と L の交点を Q 、 L_2 と L の交点を R とすると、連立方程式を解いて $Q = \left(\frac{bv-1}{mv-u}, \frac{m-bu}{mv-u} \right)$ および $R = \left(-\frac{bv-1}{mv+u}, \frac{m+bu}{mv+u} \right)$ である.

これらの点が楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上にある条件を代入する. 分母を払って $m^2 = b^2 - 1$ を用いると、 Q について $(bv-1)\{-2a^2bmu + va^2b(b^2-1) - vb^3 + a^2(b^2-1) + b^2\} = 0$ を得る. 同様に R について $(bv-1)\{2a^2bmu + va^2b(b^2-1) - vb^3 + a^2(b^2-1) + b^2\} = 0$ を得る.

もし $bv-1=0$ なら、 $v=1/b$ である. さらに $u^2+v^2=1$ から $u=\pm m/b$ となり、 L は L_1 または L_2 と同じになってしまう. これは第三の接線であることに反する. したがって $bv-1 \neq 0$ である.

上の二つの式を引くと $4a^2bmu = 0$ である. ここで $a > 0, b > 1, m > 0$ だから $u = 0$ でなければならない. よって $u^2+v^2=1$ から $v=1$ または $v=-1$ であり、第三の接線は $y=1$ または $y=-1$ に限られる.

まず第三の接線が $y=1$ の場合を調べる. L_1 との交点では $\frac{m}{b}x + \frac{1}{b} = 1$ より $x = \frac{b-1}{m}$ である. この点が楕円上にあるので $\frac{(b-1)^2}{m^2a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ である. $m^2 = b^2 - 1$ を用いて解くと $a = \frac{b}{b+1}$ となる. しかしこれは $a < 1$ であり、単位円を内部に含む条件 $a \geq 1$ に反する.

したがって第三の接線は $y=-1$ である. このとき L_1 との交点では $\frac{m}{b}x - \frac{1}{b} = 1$ より $x = \frac{b+1}{m}$ である. この点が楕円上にあるので $\frac{(b+1)^2}{m^2a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ となる. これを解くと $a^2 = \frac{b^2}{(b-1)^2}$ であり、 $a > 0$ だから $a = \frac{b}{b-1}$ である.

逆に、 $b > 1$ かつ $a = \frac{b}{b-1}$ とすれば、2 本の接線 L_1, L_2 と接線 $y=-1$ の 3 つの交点はすべて楕円 D 上にある. したがって、 P から一方の接線をたどり、次に $y=-1$ 、最後にもう一方の接線をたどると、問題文の手順どおり 3 回目の次の点は P に戻る.

以上より $a = \frac{b}{b-1}$ ($b > 1$) である.

【総評】 難度 8、計算量 8. 接線を一般形で置き、楕円上にあるという条件から第三接線の候補を絞る計算量の大きい問題である. 想定時間は 38 分程度. 最初から第三接線を水平だと決めつけると論証が不足するため、 $ux + vy = 1$ とおいて、二つの交点条件の差から $u = 0$ を導くのが安全である. 最後に $y = 1$ が $a < 1$ を与えて不適、 $y = -1$ が $a = b/(b-1)$ を与える、という必要十分の確認まで書くと答案が締まる.