

京都大学 1991 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $y = f(x)$ はつぎの①, ②を満たしている.

$$\textcircled{1} \sin f(x) = 1 - x^2$$

$$\textcircled{2} 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

(1) x を y の関数として表し, $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

【方針】

条件から $x = \pm\sqrt{1 - \sin y}$ と逆向きに表す. 面積は高さ y の水平切片の幅を積分し、半角公式で平方根を外す.

【解答】

(1) $0 \leq y \leq \pi/2$ で

$$x^2 = 1 - \sin y$$

だから

$$x = \pm\sqrt{1 - \sin y}.$$

従ってグラフは y 軸対称で、 $(\pm 1, 0)$ から $(0, \pi/2)$ へつながる 2 本の曲線である。

(2) 高さ y における横幅は $2\sqrt{1 - \sin y}$ だから、面積 S は

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin y} dy.$$

この範囲では

$$\sqrt{1 - \sin y} = \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{y}{2}.$$

従って

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\pi/2} \left(\cos \frac{y}{2} - \sin \frac{y}{2} \right) dy \\ &= 4\sqrt{2} - 4. \end{aligned}$$

【総評】 逆関数表示でグラフと面積を同時に処理する標準上位問題で目安は 15 分。平方根の符号は $0 \leq y \leq \pi/2$ を使って決める。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 2 問】

1 辺の長さ 2cm の正 4 面体を、1 つの面を下にして水平面上に置く。この正 4 面体の各辺の中点を頂点とする正 8 面体 H を中空の容器と考える。

- (1) 容器 H の高さ h_0 (cm) を求めよ。
- (2) 水を毎秒 1cm^3 の割合で H に注入するとき、水面の高さが $h\text{cm}$ ($0 \leq h \leq h_0$) になるまでに要する時間 t (秒) を求めよ。

【方針】

正四面体の辺の中点 6 個は、下側と上側の合同な正三角形を作る。高さ方向の断面は、向きが反対の 2 正三角形の Minkowski 和となるため、断面積を高さの二次式として求めて積分する。

【解答】

(1) 一辺 2 の正四面体の高さは

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

辺の中点からなる正八面体 H の上下の三角形は、底面の辺の中点と側辺の中点にあり、高さの差はその半分である。従って

$$h_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(2) $u = h/h_0$ とおく。下端と上端の水平断面は一辺 1、面積 $\sqrt{3}/4$ の正三角形で、互いに反対向きである。高さの割合 u の断面積は

$$A(u) = \frac{\sqrt{3}}{4} \{1 + 2u(1 - u)\}.$$

これは、断面が $(1 - u)$ 倍の下三角形と u 倍の上三角形の和であり、 $u = 1/2$ では一辺 $1/2$ の正六角形になることから得られる。

注水量がそのまま時間だから

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{3}}{4} h_0 \int_0^u \{1 + 2s(1 - s)\} ds \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(u + u^2 - \frac{2}{3} u^3 \right). \end{aligned}$$

$u = h\sqrt{3/2}$ を戻すと

$$t = \frac{\sqrt{3}}{4} (h - h^3) + \frac{3}{4\sqrt{2}} h^2 \quad (0 \leq h \leq \sqrt{2/3}).$$

【総評】 正八面体の非相似な水平断面を扱う難問で目安は 25 分。断面が途中で六角形になるため単純な相似錐として扱わず、断面積の二次式を確認する必要がある。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 3 問】

空間に原点を始点とする長さ 1 のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がある. $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を γ , $\vec{b}$, $\vec{c}$ のなす角を α , $\vec{c}$, $\vec{a}$ のなす角を β とするとき, つぎの関係の成立することを示せ. またここで等号の成立するのはどのような場合か.

$$0 \leq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1$$

【方針】

2 本の単位ベクトルを xy 平面に置き, 3 本目の z 成分を使う. 与式は Gram 行列の行列式の補数 $1 - v^2 \sin^2 \gamma$ となるため, 上下界と等号条件を直接判定できる.

【解答】

$\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ と置く. また

$$\vec{c} = (\cos \beta, u, v)$$

と置けば

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + u \sin \gamma, \quad \cos^2 \beta + u^2 + v^2 = 1.$$

これらを計算すると

$$1 - \{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma\} = v^2 \sin^2 \gamma.$$

従って問題の中央の式を E とおけば

$$E = 1 - v^2 \sin^2 \gamma.$$

$0 \leq v^2 \leq 1$, $0 \leq \sin^2 \gamma \leq 1$ より

$$0 \leq E \leq 1.$$

$E = 0$ となるのは $v^2 = 1, \sin^2 \gamma = 1$ のときであり, これは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに直交する場合である. $E = 1$ となるのは $v \sin \gamma = 0$, すなわち 3 ベクトルが同一平面内にある場合である.

【総評】 Gram 行列に相当する量を座標で処理する難問で目安は 20 分. 下側と上側の等号条件がそれぞれ「互いに直交」「一次従属」に対応することを区別する. 条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる.

【第 4 問】

平面上で次の方程式①を満たす点全体の集合を C_1 , ②を満たす点全体の集合を C_2 とする.

$$\textcircled{1} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 10x^2 + 14xy + 5y^2 = 1$$

(1) a, b, c, d は負でない整数で $ad - bc > 0$ を満たしている. さらに $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の定める 1 次変換 f が C_2 を C_1 に写している, すなわち $f(C_2) = C_1$ である. このとき a, b, c, d を求めよ.

(2) C_2 上の点で x 座標, y 座標とも整数であるものは何個あるか.

【方針】

写像後の長さの 2 乗が C_2 の二次形式に一致することから $A^T A$ の成分条件を得る. 非負整数の平方和を列挙して行列を一意に決める. (2) は行列式 1 の整数変換が整数格子を全単射にすることを使う.

【解答】

(1) $(x, y) \in C_2$ の像の長さの 2 乗は

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2.$$

これが $10x^2 + 14xy + 5y^2$ に一致するので

$$a^2 + c^2 = 10, \quad b^2 + d^2 = 5, \quad ab + cd = 7.$$

非負整数より

$$(a, c) = (1, 3), (3, 1), \quad (b, d) = (1, 2), (2, 1).$$

内積が 7 となる候補は $(a, c) = (1, 3), (b, d) = (1, 2)$ と $(a, c) = (3, 1), (b, d) = (2, 1)$ である。前者は $ad - bc = -1$ 、後者は 1 だから

$$(a, b, c, d) = (3, 2, 1, 1).$$

(2) 得られた行列は整数成分で行列式 1 なので、整数格子点を整数格子点へ全単射に移す。従って C_2 上の整数点は、単位円 C_1 上の整数点

$$(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

と 1 対 1 に対応する。求める個数は

$$4$$

である。

【総評】 二次形式と整数格子の全単射を組み合わせた難問で目安は 20 分。 $f(C_2) = C_1$ を係数一致へ変え、行列式の符号条件で最後の候補を選ぶ。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 5 問】

1 から n までの相異なる n 個の自然数 ($n \geq 4$) の中から無作為に 2 個を取り出し、大きい方を X_1 、小さい方を Y_1 とする。つぎに残りの $(n-2)$ 個の自然数の中から無作為に 2 個を取り出し、大きい方を X_2 、小さい方を Y_2 とする。

- (1) $X_1 + Y_1$ の期待値を求めよ。
- (2) X_1 の期待値を求めよ。
- (3) Y_2 の期待値を求めよ。

【方針】

(1) は 2 個の標本和の期待値、(2) は最大値が k となる組数を使う。(3) は第 2 回に選ばれる無順序対も全ての 2 要素集合上で一様であるという対称性を使う。

【解答】

(1) 各数が選ばれる確率は $2/n$ だから

$$E(X_1 + Y_1) = \frac{2}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = n + 1.$$

(2) $X_1 = k$ となる組は、相手を $1, \dots, k-1$ から選ぶ $k-1$ 通りである。従って

$$E(X_1) = \frac{\sum_{k=2}^n k(k-1)}{{}_nC_2} = \frac{2(n+1)}{3}.$$

(3) 最初の 2 個を除いた後に選ぶ第 2 の無順序対も、対称性により全ての ${}_nC_2$ 個の組の上で一様である。従って Y_2 の分布は、最初に 2 個を選んだときの小さい方と同じである。

$$E(Y_2) = E(X_1 + Y_1) - E(X_1) = n + 1 - \frac{2(n+1)}{3} = \frac{n+1}{3}.$$

【総評】 無作為抽出の対称性を期待値へ使う標準問題で目安は 12 分。第 2 回の組も周辺分布として一様であることを説明できれば、条件付き計算を避けられる。条件の根拠、途中式、等号・極限・端点の扱いまで答案に明記すれば、採点者が検算できる完答になる。

【第 6 問】

- (1) 任意の定数 a に対して $e^x \geq e^a + (x - a)e^a$ が成り立つことを示せ。
 (2)

$$\int_0^1 e^{\sin \pi x} dx \geq e^{\frac{2}{\pi}}$$

を示せ.

【方針】

(1) は指数関数と接線の差を微分して示す。(2) は a を $\sin \pi x$ の区間平均 $2/\pi$ に選び、(1) を積分して一次項を消す。

【解答】

(1) 固定した a に対し

$$H(x) = e^x - e^a - (x - a)e^a$$

とおく。 $H'(x) = e^x - e^a$ だから $x = a$ で最小値 0 をとる。従って

$$e^x \geq e^a + (x - a)e^a.$$

(2)

$$a = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

とおく。(1) を x の代わりに $\sin \pi x$ へ適用すると

$$e^{\sin \pi x} \geq e^a + (\sin \pi x - a)e^a.$$

両辺を 0 から 1 まで積分すれば、一次項の積分は 0 になるので

$$\int_0^1 e^{\sin \pi x} dx \geq e^a = e^{2/\pi}.$$

【総評】 接線不等式を平均値に合わせて積分する標準上位問題で目安は 10 分。接点 a を任意に選ぶのではなく、 $\sin \pi x$ の平均に合わせることが要点である。