

京都大学 1991 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

y 軸上の点 $P(0, -p)$ ($p > 0$) と定点 $A(0, 2)$ に対し, AP を直径とする円を C とする. 点 $Q(s, t)$ ($s \geq 0$) を, PQ の中点 = 「 C と直線 $y = 1$ の交点」 となるようにとる.

(1) s, t を求めよ.

(2) P が y 軸上の負の部分のすべてを動くとき, 対応する Q 全体はどのような曲線になるか. また直線 PQ はこの曲線の, 点 Q での, 接線となっていることを示せ.

【方針】

円と直線 $y = 1$ の交点をまず p で表し, その点が P, Q の中点であることから s, t を決める. 軌跡は媒介変数 p を消去して求め, 最後に, 得られた曲線の接線の傾きと直線 PQ の傾きが一致することを確認する. 中点を利用すると座標がすぐ定まるので, 接線の確認まで同じ p で一貫して処理する.

【解答】

(1)

円の直径の両端は $A(0, 2)$, $P(0, -p)$ であるから, 中心は $\left(0, \frac{2-p}{2}\right)$ で, 半径は $\frac{p+2}{2}$ である. したがって円の方程式は $x^2 + \left(y - \frac{2-p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+2}{2}\right)^2$ となる.

この円と直線 $y = 1$ との交点を求める. $y = 1$ を代入すると $x^2 + \left(1 - \frac{2-p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+2}{2}\right)^2$ すなわち $x^2 + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2 + 4p + 4}{4}$ であるから $x^2 = p + 1$ を得る. $s \geq 0$ であり, Q は右側の点を用いるので, この交点を $M(\sqrt{p+1}, 1)$ とおく.

いま M は $P(0, -p)$ と $Q(s, t)$ の中点であるから $\frac{s}{2} = \sqrt{p+1}$, $\frac{t-p}{2} = 1$ である. よって $s = 2\sqrt{p+1}$, $t = p+2$ となる.

(2)

次に Q の軌跡を求める. $t = p+2$ より $p = t-2$ であり, これを $s^2 = 4(p+1)$ に代入すると $s^2 = 4(t-1)$ を得る. したがって通常の座標 (x, y) で書けば $y = \frac{x^2}{4} + 1$ である. ただし $p > 0$ なので $t > 2$, また $s = 2\sqrt{p+1} > 2$ である. したがって実際の軌跡は, 放物線 $y = \frac{x^2}{4} + 1$ のうち $x > 2$ (したがって $y > 2$) を満たす部分である.

最後に接線であることを示す. 直線 PQ の傾きは

$$\frac{t - (-p)}{s - 0} = \frac{t+p}{s} = \frac{p+2+p}{2\sqrt{p+1}} = \frac{2p+2}{2\sqrt{p+1}} = \sqrt{p+1}$$

である. 一方, 軌跡 $y = \frac{x^2}{4} + 1$ の点 $Q(s, t)$ における接線の傾きは $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$, したがって $x = s = 2\sqrt{p+1}$ を代入して $\frac{s}{2} = \sqrt{p+1}$ である. これは直線 PQ の傾きと一致する.

また Q はこの放物線上にあるから, P, Q を結ぶ直線は点 Q における軌跡の接線である.

【総評】 この問題の要点は, 円そのものを直接追いかけるのではなく, 直線 $y = 1$ 上の交点が P, Q の中点であることを使う点にある. 交点の x 座標が $\sqrt{p+1}$ とすぐ出るため, Q の座標も $s = 2\sqrt{p+1}$, $t = p+2$ と自然に定まる. 軌跡では $p > 0$ から範囲条件 $x > 2$, $y > 2$ を落とさないことが大切である. 接線の証明は, 直線 PQ の傾きと放物線の微分係数を比較すればよく, 求めた媒介表示がそのまま有効に働く.

【第 2 問】

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする。

- (1) f による全平面の像は直線 $l: 2x + y = 0$ であることを示せ。
- (2) 平面上の点 $P(x, y)$ に対し、 l 上の点で P との距離が最小となる点を Q とし、 f による像が Q となる点のうちで、原点との距離が最小となる点を P' とする。 P' の座標 (x', y') を x, y で表せ。
- (3) 点 $P(x, y)$ に点 $P'(x', y')$ を対応させる写像を g とする。合成写像 $f \circ g \circ f$ および $g \circ f \circ g$ を求めよ。

【方針】

変換 f は (x, y) を $(x - y, -2(x - y))$ に移すので、得られる点全体は直線 l 上にある。逆に直線上の任意の点を作れることも確認する。 g は、まず点 P を直線 l に直交射影し、次にその点へ移る点のうち原点に最も近いものを求める。最後は得られた g の式を用いて、二つの合成がそれぞれ f, g に戻ることを直接計算する。

【解答】

(1)

(x, y) が f により (X, Y) に移るとすると $X = x - y, Y = -2x + 2y = -2(x - y)$ である。したがって $Y = -2X$ すなわち $2X + Y = 0$ を満たす。逆に、直線 $2X + Y = 0$ 上の点は $(X, -2X)$ と書け、これは例えば $(X, 0)$ を f で移した点である。よって f により得られる点全体は $l: 2x + y = 0$ である。

(2)

次に g を求める。直線 l は原点を通り、方向ベクトルを $(1, -2)$ と取れる。点 $P(x, y)$ から l へ下ろした垂線の足を Q とすると、 Q は $(1, -2)$ 方向への正射影であるから $Q = \frac{x - 2y}{1^2 + (-2)^2}(1, -2) = \frac{x - 2y}{5}(1, -2)$ である。したがって $Q = \left(\frac{x - 2y}{5}, -\frac{2(x - 2y)}{5}\right)$ である。 f によって Q に移る点 (u, v) は $u - v = \frac{x - 2y}{5}$ を満たす。この直線上で原点からの距離 $u^2 + v^2$ が最小となる点を求める。条件 $u - v = q, q = \frac{x - 2y}{5}$ のもとで考えると、直線 $u - v = q$ に原点から垂線を下ろした足が最短の点である。直線の法線方向は $(1, -1)$ なので、その点は $(u, v) = \left(\frac{q}{2}, -\frac{q}{2}\right)$ である。したがって $g(x, y) = \left(\frac{x - 2y}{10}, -\frac{x - 2y}{10}\right)$ となる。

(3)

最後に合成を確認する。 $u = x - y$ とおくと $f(x, y) = (u, -2u)$ である。これに g を作用させると

$$g(f(x, y)) = g(u, -2u) = \left(\frac{u - 2(-2u)}{10}, -\frac{u - 2(-2u)}{10}\right) = \left(\frac{u}{2}, -\frac{u}{2}\right)$$

である。さらに f を作用させると $f\left(\frac{u}{2}, -\frac{u}{2}\right) = (u, -2u) = f(x, y)$ となる。よって $f \circ g \circ f = f$ である。

また $g(x, y) = (v, -v), v = \frac{x - 2y}{10}$ とおくと $f(g(x, y)) = f(v, -v) = (2v, -4v)$ である。さらに g を作用させると $g(2v, -4v) = \left(\frac{2v - 2(-4v)}{10}, -\frac{2v - 2(-4v)}{10}\right) = (v, -v)$ である。したがって $g \circ f \circ g = g$ も成り立つ。

【総評】 最初に $f(x, y) = (x - y, -2(x - y))$ とまとめると、直線 $2x + y = 0$ が自然に現れる。 g の定義は二段階であり、点 P を直線 l に直交射影すること、そのあと f でその点へ移る点のうち原点に最も近いものを選ぶことを分けて処理するとよい。得られた g は一次式なので、最後の合成関係は文字を置いて直接計算すれば確認できる。

【第 3 問】

3 組の対辺が互いに垂直であるような 4 面体 V がある。このとき、 V の各辺の中点は、 V の重心を中心とするある 1 つの球面上にあることを示せ。

【方針】

重心を原点に取り、各頂点の位置をベクトルで表す。辺の中点が同一球面上にあることは、原点から各中点までの距離がすべて等しいことと同じである。そこで、向かい合う辺が垂直である条件を内積の式に直し、 $|a+b|$, $|a+c|$, $|a+d|$ などの長さが等しいことを順に示す。

【解答】

四面体の頂点を A, B, C, D とし、重心を原点 O に取る。各頂点の位置ベクトルを $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, $\vec{OC} = c$, $\vec{OD} = d$ と書くと、重心が原点であることから $a+b+c+d=0$ である。

辺 AB の中点の位置ベクトルは $(a+b)/2$ である。同様に、六つの辺の中点は

$$\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{c+d}{2}$$

で表される。したがって、これらが原点を中心とする同一球面上にあることを示すには、これらの長さがすべて等しいことを示せばよい。

まず、向かい合う辺 AD と BC が垂直であるから $(a-d) \cdot (b-c) = 0$ である。ここで $d = -(a+b+c)$ を用いると $a-d = 2a+b+c$ であるから $(2a+b+c) \cdot (b-c) = 0$ となる。これを展開すると $2a \cdot b - 2a \cdot c + |b|^2 - |c|^2 = 0$ である。一方、 $|a+b|^2 - |a+c|^2 = 2a \cdot b - 2a \cdot c + |b|^2 - |c|^2$ だから $|a+b| = |a+c|$ を得る。

同様に、向かい合う辺 AC と BD が垂直であることから $(a-c) \cdot (b-d) = 0$ であり、同じ計算により $|a+b| = |a+d|$ が得られる。したがって $|a+b| = |a+c| = |a+d|$ である。

さらに $a+b+c+d=0$ より $a+b = -(c+d)$, $a+c = -(b+d)$, $a+d = -(b+c)$ である。よって $|a+b| = |c+d|$, $|a+c| = |b+d|$, $|a+d| = |b+c|$ も成り立つ。

以上から、六つの中点の原点からの距離はすべて $\frac{1}{2}|a+b|$ に等しい。したがって六つの辺の中点は、重心 O を中心とし半径 $\frac{1}{2}|a+b|$ の一つの球面上にある。

【総評】 重心を原点に置くと、辺の中点の位置ベクトルが $(a+b)/2$ の形にそろう。あとは「向かい合う辺が垂直」という幾何条件を内積の等式に変換し、二つの中点距離の平方差がその等式そのものになることを見抜けばよい。最後に $a+b = -(c+d)$ などを使うことで、向かい合う辺の中点距離も同じになる。球面の中心が重心であることまで自然に説明できる解法である。

【第 4 問】

実数 a, b ($0 \leq a < \frac{\pi}{4}, 0 \leq b < \frac{\pi}{4}$) に対し次の不等式の成り立つことを示せ.

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leq \tan \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)$$

【方針】

右側の不等式は $\tan x$ の上に凸な性質を、左側の不等式は $\log(\tan x)$ の上に凹な性質を使って示す。端点 $a = 0$ または $b = 0$ では $\log(\tan x)$ が直接使えないので、まず $0 < a, b < \pi/4$ で証明し、最後に連続性で端点を含める。

【解答】

まず $0 < a, b < \frac{\pi}{4}$ の場合を考える。端点を含む場合は最後に扱う。

右側の不等式を示す。 $h(x) = \tan x$ とおくと $h''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$ である。 $0 < x < \pi/4$ では $\tan x > 0$ だから $h''(x) > 0$ であり、 $h(x) = \tan x$ はこの区間で下に凸である。したがって

$$\tan \frac{a+b}{2} = h \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{h(a) + h(b)}{2} = \frac{\tan a + \tan b}{2}$$

が成り立つ。

次に左側の不等式を示す。 $k(x) = \log(\tan x)$ とおく。 $0 < x < \pi/4$ で定義され、 $k'(x) = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$ である。さらに $k''(x) = -\frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x}$ である。 $0 < x < \pi/4$ では $\cos 2x > 0$ だから $k''(x) < 0$ であり、 $k(x)$ はこの区間で上に凸である。したがって $k \left(\frac{a+b}{2} \right) \geq \frac{k(a) + k(b)}{2}$ である。これを指数の形に戻すと $\tan \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{\tan a \tan b}$ を得る。

以上より、 $0 < a, b < \pi/4$ では $\sqrt{\tan a \tan b} \leq \tan \frac{a+b}{2} \leq \frac{\tan a + \tan b}{2}$ が成り立つ。

最後に、 $a = 0$ または $b = 0$ の場合を考える。両辺に現れる $\tan x$ は $[0, \pi/4]$ で連続であるから、上で得た不等式において a または b を正の値から 0 に近づければ、同じ不等式が端点でも成り立つ。したがって $0 \leq a, b \leq \frac{\pi}{4}$ 全体で求める不等式が成り立つ。

【総評】 中央の値を $(a+b)/2$ に持つ不等式なので、平均に関する凸性・凹性を使うのが自然である。右側は $\tan x$ の二階導関数が正であることから従い、左側は積の平方根が出てくるため $\log(\tan x)$ を考えると和の平均に変換できる。 $a = 0$ では対数を直接取れないので、正の範囲で証明してから連続性で端点を含める処理が必要である。

【第 5 問】

袋の中に N 個の白玉と 3 個の赤玉がある。「袋の中の $(N+3)$ 個の玉から無作為に 1 個を取り出し、つぎに (外部にある) 白玉を 1 個袋に入れる」という試行をくり返す。 n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を P_n とする。また n 回目の試行を行なう前、袋の中に赤玉が i 個 ($i = 1, 2, 3$) あり、かつ n 回目の試行で赤玉をとり出す確率を $P_{i,n}$ ($i = 1, 2, 3$) とする。従って $P_n = P_{1,n} + P_{2,n} + P_{3,n}$ である。

- (1) $P_{1,n+1}, P_{2,n+1}, P_{3,n+1}$ を $P_{1,n}, P_{2,n}, P_{3,n}$ で表す式 (漸化式) を求めよ。
- (2) P_{n+1} を P_n で表す式を求め、 P_n を求めよ。

【方針】

赤玉が一個、二個、三個残っている各状態を分けて、その直前状態の確率を導入する。 $P_{i,n}$ は「第 n 回直前に赤玉が i 個残っていて、さらに第 n 回に赤を引く」確率なので、状態確率に戻して推移を立てる。三つの式を足すと、総確率 P_n の漸化式だけが残る。

【解答】

(1)

第 n 回の試行の直前に赤玉がそれぞれ一個、二個、三個残っている確率を $A_{1,n}, A_{2,n}, A_{3,n}$ とおく。袋の中の玉の総数は常に $N+3$ 個であるから $P_{1,n} = \frac{1}{N+3} A_{1,n}, P_{2,n} = \frac{2}{N+3} A_{2,n}, P_{3,n} = \frac{3}{N+3} A_{3,n}$ である。

まず赤玉が一個残る状態について考える。第 $n+1$ 回の直前に赤玉が一個残るのは、第 n 回の直前に赤玉が一個残ってい

て白玉を引く場合、または赤玉が二個残っていて赤玉を引く場合である。したがって $A_{1,n+1} = A_{1,n} \frac{N+2}{N+3} + A_{2,n} \frac{2}{N+3}$ である。これを $P_{i,n}$ で表すと $P_{1,n+1} = \frac{N+2}{N+3} P_{1,n} + \frac{1}{N+3} P_{2,n}$ となる。

次に赤玉が二個残る状態について考える。第 $n+1$ 回の直前に赤玉が二個残るのは、第 n 回の直前に赤玉が二個残っていて白玉を引く場合、または赤玉が三個残っていて赤玉を引く場合である。よって $A_{2,n+1} = A_{2,n} \frac{N+1}{N+3} + A_{3,n} \frac{3}{N+3}$ であり、したがって $P_{2,n+1} = \frac{N+1}{N+3} P_{2,n} + \frac{2}{N+3} P_{3,n}$ を得る。

最後に赤玉が三個残る状態について考える。これは、第 n 回の直前にも赤玉が三個残っていて、第 n 回に白玉を引いた場合だけである。白玉は N 個なので $A_{3,n+1} = A_{3,n} \frac{N}{N+3}$ であり、 $P_{3,n+1} = \frac{N}{N+3} P_{3,n}$ となる。

(2)

ここで $P_n = P_{1,n} + P_{2,n} + P_{3,n}$ であるから、三つの漸化式を足すと

$$P_{n+1} = \frac{N+2}{N+3} P_{1,n} + \left(\frac{1}{N+3} + \frac{N+1}{N+3} \right) P_{2,n} + \left(\frac{2}{N+3} + \frac{N}{N+3} \right) P_{3,n}$$

となる。各係数はすべて $\frac{N+2}{N+3}$ にそろうので $P_{n+1} = \frac{N+2}{N+3} P_n$ を得る。

初回は赤玉が三個残っている状態から始まるから $P_1 = \frac{3}{N+3}$ である。したがって $P_n = \frac{3}{N+3} \left(\frac{N+2}{N+3} \right)^{n-1}$ である。

【総評】 赤玉が三個あるため状態は三つに増えるが、考え方は赤玉二個の場合と同じである。 $P_{i,n}$ を状態確率そのものと見なさず、状態確率に「その回で赤を引く確率」を掛けた量として扱うことが重要である。三つの状態の推移を丁寧に書くと、最後に全確率 P_n の係数がすべて $(N+2)/(N+3)$ にそろい、等比数列として閉じる。

【第 6 問】

関数 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) は次の条件 (A), (B) を満たしている。

- (A) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続、かつ $f(x) > 0$
 (B) 正の定数 a があって

$$\int_0^x (f(t))^{-a} dt = \int_a^{f(x)} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} + t^{-a} \right) dt$$

- (1) (B) の等式の両辺を x について微分して得られる (y の満たす) 微分方程式を書け。また $f(0)$ の値を求めよ。
 (2) 正の定数 b, c があって次の不等式 (イ), (ロ) を満たしていることを示せ。

(イ) $b \leq f'(x) \leq 1$

(ロ) $0 \leq f(x) \left(\frac{1}{f'(x)} - 1 \right) \leq c$

- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ を求めよ。また $f'(x)$ の最小値を求めよ。

【方針】

積分方程式を x で微分して $f'(x)$ の式を得る。そこから $f'(x) > 0$ と $f'(x) \leq 1$ が分かり、さらに $u^a e^{-u^2/2}$ 型の関数があることを使って下からも押さえる。極限は $f'(x)$ の式と $f(x) \rightarrow \infty$ から従う。最小値は、 $f(x)$ が $[a, \infty)$ を動くことを使い、 $u^a e^{-u^2/2}$ の最大値を調べて求める。

【解答】

(1)

まず、 $x = 0$ を与えられた等式に代入する。左辺は 0 であるから

$$\int_a^{f(0)} \left(e^{-t^2/2} + t^{-a} \right) dt = 0$$

である。被積分関数は $t > 0$ で正であり、また $f(0) > 0$ なので $f(0) = a$ でなければならない。

次に、等式の両辺を x で微分する。左辺は

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)^{-a} dt = f(x)^{-a}$$

である。右辺は上端が $f(x)$ であるから $(e^{-f(x)^2/2} + f(x)^{-a}) f'(x)$ となる。よって $f(x)^{-a} = (e^{-f(x)^2/2} + f(x)^{-a}) f'(x)$ である。両辺を $f(x)^{-a}$ で割ると $1 = (f(x)^a e^{-f(x)^2/2} + 1) f'(x)$ だから $f'(x) = \frac{1}{1 + f(x)^a e^{-f(x)^2/2}}$ を得る。

(2)

この式から直ちに $0 < f'(x) \leq 1$ が分かる。さらに $f'(x) > 0$ より $f(x)$ は増加し、 $f(0) = a$ だから $f(x) \geq a$ ($x \geq 0$) である。関数 $u^a e^{-u^2/2}$ ($u \geq a$) は $u \rightarrow \infty$ で 0 に近づき、閉区間ごとに連続であるから、上に有界である。その上界を M とすれば $0 \leq f(x)^a e^{-f(x)^2/2} \leq M$ である。したがって $\frac{1}{1+M} \leq f'(x) \leq 1$ が成り立つ。よって $b = \frac{1}{1+M}$ とおけば、条件を満たす正の定数 b が存在する。

また $\frac{1}{f'(x)} - 1 = f(x)^a e^{-f(x)^2/2}$ であるから $f(x) \left(\frac{1}{f'(x)} - 1 \right) = f(x)^{a+1} e^{-f(x)^2/2}$ である。関数 $u^{a+1} e^{-u^2/2}$ ($u \geq a$) も上に有界であるから、その上界を c とすれば $0 \leq f(x) \left(\frac{1}{f'(x)} - 1 \right) \leq c$ が成り立つ。

(3)

次に極限を求める。上で得た $f'(x) \geq b > 0$ より $f(x) \geq f(0) + bx = a + bx$ であるから、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow \infty$ である。したがって $f(x)^a e^{-f(x)^2/2} \rightarrow 0$ となり、 $f'(x) = \frac{1}{1 + f(x)^a e^{-f(x)^2/2}}$ から $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$ を得る。

最後に $f'(x)$ の最小値を求める。 $f'(x)$ は $f'(x) = \frac{1}{1 + u^a e^{-u^2/2}}$, $u = f(x)$ の形であり、 $f(x)$ は a から増加して ∞ まで動く。したがって $f'(x)$ の最小値は、 $u \geq a$ における $u^a e^{-u^2/2}$ の最大値から決まる。 $\phi(u) = u^a e^{-u^2/2}$ とおく。 $u > 0$ で $\frac{\phi'(u)}{\phi(u)} = \frac{a}{u} - u = \frac{a - u^2}{u}$ である。したがって $\phi(u)$ は $0 < u < \sqrt{a}$ で増加し、 $u > \sqrt{a}$ で減少する。 $0 < a \leq 1$ のときは $a \leq \sqrt{a}$ であるから、区間 $u \geq a$ における最大値は $u = \sqrt{a}$ で $\phi(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^a e^{-a/2} = a^{a/2} e^{-a/2}$ である。よってこの場合の $f'(x)$ の最小値は $\frac{1}{1 + a^{a/2} e^{-a/2}}$ である。

一方、 $a \geq 1$ のときは $a \geq \sqrt{a}$ であり、区間 $u \geq a$ では $\phi(u)$ は減少する。したがって最大値は $u = a$ で $\phi(a) = a^a e^{-a^2/2}$ である。よってこの場合の $f'(x)$ の最小値は $\frac{1}{1 + a^a e^{-a^2/2}}$ である。 $a = 1$ では二つの式はいずれも $\frac{1}{1 + e^{-1/2}}$ となり一致する。

【総評】 積分方程式は、まず微分して $f'(x)$ を $f(x)$ だけで表すのが出発点である。得られた式から $f'(x) > 0$ が分かるため、 $f(x)$ は a から単調に増加する。評価問題では、 $u^a e^{-u^2/2}$ や $u^{a+1} e^{-u^2/2}$ が大きい u で 0 に近づくことを使えば十分である。最小値は $f'(x)$ そのものではなく、分母にある $u^a e^{-u^2/2}$ の最大値を調べる問題に変わる。 a と $\sqrt{a}$ の大小が $a = 1$ で入れ替わるため、最後の答えが二つの場合に分かれる。