

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1992 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

0 でない x の整式 $f(x)$ に対し,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

,

$$G(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

とおく. ある定数 p, q が存在して, $F(G(x)) = -\{F(x)\}^2 + pG(x) + q$ が成立しているとする.

(1)

$$a = \int_0^1 f(t)dt$$

とおくとき, $F(x)$ を a を用いて表わせ.

(2) さらに, $0 \leq x \leq 1$ での $F(x)$ の最大値が $\frac{1}{2}$ であるとき, $f(x)$ を求めよ.

第 2 問

一辺の長さが n の立方体 $ABCD - PQRS$ がある. ただし, 2つの正方形 $ABCD$, $PQRS$ は立方体の向かい合った面で AP , BQ , CR , DS は, それぞれ, 立方体の辺である.

立方体の各面は一辺の長さ 1 の正方形に碁盤目 (ごばんめ) 状に区切られているとする. ここで, 頂点 A から頂点 R へ碁盤目上の辺をたどっていくときの最短径路を考える.

- (1) 辺 BC 上の点を通過する最短径路は全部で何通りあるか.
- (2) 頂点 A から頂点 R への最短径路は全部で何通りあるか.

第 3 問

放物線 $y = x^2$ の上の点 $P(t, t^2)$ (ただし, $t > 0$) でこの曲線に接し, かつ y 軸にも接する円を C_1, C_2 とし, それぞれの半径を r, R ($r < R$) とする.

- (1) t が正の実数全体を動くとき, $\frac{R}{r}$ のとり得る値の範囲を求めよ.
- (2) $\frac{R}{r} = 2$ となる点 $P(t, t^2)$ を求めよ.

第 4 問

平面ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ の内積を $\vec{p} \cdot \vec{q}$ と表わす. f は平面上の一次変換とする.

- (1) $\vec{p}$, $\vec{q}$ がたがいに直交する単位ベクトルとすると, $T = f(\vec{p}) \cdot \vec{p} + f(\vec{q}) \cdot \vec{q}$ は, ベクトルの組 $\vec{p}$, $\vec{q}$ のとり方によらないで, f によってきまる値であることを示せ.
- (2) 原点 O を通る 2 つの定直線 l と m があって, f によって l 上の任意の点 R は R 自身に移され, m 上の任意の点 S は OS の中点 S' に移されたとする. このとき f に対する T の値を求めよ.

第 5 問

1 から $N + 2$ ($N \geq 2$) までの番号のついた玉 ($N + 2$) 個を用意し、手元に 1 と 2 の番号のついた玉をおき、残り N 個の玉を箱に入れる。さらに、

「玉を 1 つ箱から取り出し、手元の玉 2 個と取り出した玉 1 個計 3 個の玉のうち最も小さい番号の玉を箱に返す」

という操作を n 回くり返す ($n \geq 1$)。最後に手元に残った 2 個の玉の番号のうち小さい方を X とし、大きい方を Y とする。

(1) $Y \leq m$ である確率 $P(Y \leq m)$ を求めよ ($m = 3, 4, \dots, N + 2$)。

(2) $X \leq m$ である確率 $P(X \leq m)$ を求めよ ($m = 2, 3, \dots, N + 1$)。

第 6 問

$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とし、空間内の原点 O と 4 つの点

$$A(1, 1, 1), \quad B(-a^{-1}, a, 0), \quad C(-a, 0, a^{-1}), \quad D(0, -a^{-1}, a)$$

について、次の問に答えよ.

- (1) 4 点 A, B, C, D は正方形の頂点であることを示せ.
- (2) 四角錐 $O - ABCD$ を平面 $x = 0$ によって 2 つの部分 W_1, W_2 に分けたとき, W_1, W_2 の体積の比を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)