

京都大学 1992 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

0 でない x の整式 $f(x)$ に対し、

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

、

$$G(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

とおく. ある定数 p, q が存在して, $F(G(x)) = -\{F(x)\}^2 + pG(x) + q$ が成立しているとする.

(1)

$$a = \int_0^1 f(t) dt$$

とおくとき, $F(x)$ を a を用いて表わせ.

(2) さらに, $0 \leq x \leq 1$ での $F(x)$ の最大値が $\frac{1}{2}$ であるとき, $f(x)$ を求めよ.

【方針】

$G(x) = a - F(x)$ を代入し, $F(x)$ が区間を動くことから $F(a - y)$ と y の多項式恒等式として比較する. F の二次式を決め, 区間 $[0, 1]$ の最大値条件で a を確定する.

【解答】

$a = F(1)$ とおくと $G(x) = a - F(x)$ である. $y = F(x)$ はある区間を動くので, 与式は

$$F(a - y) = -y^2 + p(a - y) + q$$

という y の恒等式である. 従って F は二次式である. $F(0) = 0$ より

$$F(x) = ux^2 + vx$$

とおく. 左辺の y^2 の係数を比較すると $u = -1$ である. また $F(1) = a$ より $v = a + 1$ である.

(1) よって

$$F(x) = x(a + 1 - x).$$

実際, 係数比較から $p = 1 - a$, $q = a^2$ も選べるので条件は満たされる.

(2) F は下に凸ではなく上に開かない二次関数で, 頂点は $x = (a + 1)/2$ である. 頂点が $[0, 1]$ にある場合の最大値は

$$\frac{(a + 1)^2}{4}.$$

これが $1/2$ となり, 頂点条件 $-1 \leq a \leq 1$ を満たすのは

$$a = \sqrt{2} - 1.$$

$a < -1$ では区間の最大値は 0 , $a > 1$ では最大値 $F(1) = a > 1$ なので他に解はない. 従って

$$f(x) = F'(x) = \sqrt{2} - 2x.$$

【総評】 積分で定義された多項式を恒等式から決める難問で目安は 22 分. $F(x)$ が非定数で値域に区間を含むため係数比較できることと, 頂点が区間外の場合も除外することが重要である.

【第 2 問】

一辺の長さが n の立方体 $ABCD - PQRS$ がある. ただし, 2 つの正方形 $ABCD$, $PQRS$ は立方体の向かい合った面で AP , BQ , CR , DS は, それぞれ, 立方体の辺である.

立方体の各面は一辺の長さ 1 の正方形に碁盤目 (ごばんめ) 状に区切られているとする. そこで, 頂点 A から頂点 R へ碁盤目上の辺をたどっていくときの最短経路を考える.

- (1) 辺 BC 上の点を通過する最短経路は全部で何通りあるか.
- (2) 頂点 A から頂点 R への最短経路は全部で何通りあるか.

【方針】

格子路を x, y, z 各方向の単位移動の語として表す. 表面上に留まるには, 第 3 種類目の方向が初めて現れるまでに, 先の 2 方向の一方が n 回完了している必要がある. (1) は指定辺へ初めて到達する位置で分け, (2) は最後に現れる方向を選んで数える.

【解答】

座標を

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (n, 0, 0), \quad C = (n, n, 0), \quad R = (n, n, n)$$

とする. 最短経路は正の x, y, z 方向の移動を各 n 回行う長さ $3n$ の経路である.

(1) 辺 BC を通るには, 最初の z 方向移動より前に x 方向移動を n 回終える必要がある. n 回目の x 移動の前に y 移動が j 回あるとすると, そこまでの並べ方は

$${}^{n+j-1}C_j$$

通り, その後の $n-j$ 回の y 移動と n 回の z 移動の並べ方は

$${}^{2n-j}C_n$$

通りである. よって

$$\sum_{j=0}^n {}^{n+j-1}C_j {}^{2n-j}C_n = {}^{3n}C_n$$

通りである. 最後の等式は積を「 n 個の x の最後の位置」で分類する Vandermonde 型の数え上げである.

(2) 3 方向のうち最後に初めて現れる方向を選ぶ方法は 3 通りである. 例えば z が最後とする. 最初の z より前には x, y がともに現れ, どちらか一方はすでに n 回現れている.

x が n 回, y が j 回 ($1 \leq j \leq n$) 現れてから最初の z が現れる経路数は

$${}^{n+j}C_j {}^{2n-j-1}C_{n-1}.$$

x, y を入れ替えたものを 2 倍し, 両方が n 回の場合の重複 ${}^{2n}C_n$ を引く. ここで

$$\sum_{j=0}^n {}^{n+j}C_j {}^{2n-j-1}C_{n-1} = {}^{3n}C_n$$

であり, $j=0$ の項は ${}^{2n-1}C_{n-1} = \frac{1}{2} {}^{2n}C_n$ である. 従って最後の方向を固定した個数は

$$2 \left({}^{3n}C_n - \frac{1}{2} {}^{2n}C_n \right) - {}^{2n}C_n = 2 ({}^{3n}C_n - {}^{2n}C_n).$$

求める総数は

$$6 ({}^{3n}C_n - {}^{2n}C_n).$$

【総評】 立方体表面の制約を語の初出条件へ変換する最難関級の数え上げで目安は 30 分. 表面条件を落として単純な多項係数にしないことと, 最後に現れる方向の重複を正確に引くことが核心である.

【第 3 問】

放物線 $y = x^2$ の上の点 $P(t, t^2)$ (ただし, $t > 0$) でこの曲線に接し, かつ y 軸にも接する円を C_1, C_2 とし, それぞれの半径を r, R ($r < R$) とする.

- (1) t が正の実数全体を動くとき, $\frac{R}{r}$ のとり得る値の範囲を求めよ.
 (2) $\frac{R}{r} = 2$ となる点 $P(t, t^2)$ を求めよ.

【方針】

円の中心を放物線の法線上に置き, y 軸への距離が半径である条件を使う。法線方向の係数について二次方程式を解くと 2 半径が得られ、その比を単調な媒介変数で表す。

【解答】

$s = \sqrt{4t^2 + 1}$ とおく。点 P における放物線の法線方向は $(-2t, 1)$ だから、円の中心は

$$(t - 2t\lambda, t^2 + \lambda)$$

と表せる。半径は $|\lambda|s$ であり、 y 軸に接する条件は

$$|t - 2t\lambda| = |\lambda|s.$$

2 乗して整理すると

$$\lambda^2 + 4t^2\lambda - t^2 = 0,$$

従って $\lambda = -2t^2 \pm ts$ である。2 つの半径は

$$r = ts(s - 2t), \quad R = ts(s + 2t).$$

(1)

$$\frac{R}{r} = \frac{s + 2t}{s - 2t} = (s + 2t)^2$$

である。 $s + 2t$ は $t > 0$ で 1 から無限大まで単調に増えるので

$$1 < \frac{R}{r} < \infty.$$

(2) $R/r = 2$ なら $s + 2t = \sqrt{2}$ である。 $s = \sqrt{4t^2 + 1}$ を代入して

$$t = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

従って

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{1}{32} \right).$$

【総評】 法線と円の接触条件から 2 つの解を同時に扱う難問で目安は 18 分。半径の大小を正しく対応させ、 $(s+2t)(s-2t) = 1$ を使って比を簡潔にする。条件を使う箇所、途中計算、端点や等号の判定まで答案に明記すれば、論理を失わず完答できる。

【第 4 問】

平面ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ の内積を $\vec{p} \cdot \vec{q}$ と表わす. f は平面上の一次変換とする.

- (1) $\vec{p}$, $\vec{q}$ がたがいに直交する単位ベクトルとすると, $T = f(\vec{p}) \cdot \vec{p} + f(\vec{q}) \cdot \vec{q}$ は, ベクトルの組 $\vec{p}$, $\vec{q}$ のとり方によらないで, f によってきまる値であることを示せ.
- (2) 原点 O を通る 2 つの定直線 l と m があって, f によって l 上の任意の点 R は R 自身に移され, m 上の任意の点 S は OS の中点 S' に移されるとする. このとき f に対する T の値を求めよ.

【方針】

一次変換の行列を置き, 直交単位ベクトルを角度表示して対角方向の内積和を計算する. (2) は 2 本の不変直線が固有方向となるため, 座標の取り方によらない値をその 2 方向で求める.

【解答】

(1) 標準基底で f の行列を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする. 直交単位ベクトルを

$$\vec{p} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{q} = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

と置ける. 直接計算すると

$$f(\vec{p}) \cdot \vec{p} + f(\vec{q}) \cdot \vec{q} = a + d.$$

従って T は θ によらず, 一次変換 f のみによって決まる.

(2) 直線 l, m の方向ベクトルはそれぞれ f により 1 倍, $1/2$ 倍される. 2 直線は異なるので, この 2 方向を基底に取った行列の対角成分は $1, 1/2$ である. (1) の値は基底の取り方によらない対角成分の和だから

$$T = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

【総評】 一次変換の対角成分和の不変性を高校ベクトルで示す問題で目安は 12 分. (2) では 2 直線が異なるため 2 方向が基底になることを確認する. 条件を使う箇所, 途中計算, 端点や等号の判定まで答案に明記すれば, 論理を失わず完答できる.

【第 5 問】

1 から $N+2$ ($N \geq 2$) までの番号のついた玉 ($N+2$) 個を用意し, 手元に 1 と 2 の番号のついた玉をおき, 残り N 個の玉を箱に入れる. さらに,

「玉を 1 つ箱から取り出し, 手元の玉 2 個と取り出した玉 1 個計 3 個の玉のうち最も小さい番号の玉を箱に返す」

という操作を n 回くり返す ($n \geq 1$). 最後に手元に残った 2 個の玉の番号のうち小さい方を X とし, 大きい方を Y とする.

- (1) $Y \leq m$ である確率 $P(Y \leq m)$ を求めよ ($m = 3, 4, \dots, N+2$).
- (2) $X \leq m$ である確率 $P(X \leq m)$ を求めよ ($m = 2, 3, \dots, N+1$).

【方針】

手元にはこれまで現れた玉のうち大きい 2 個が残る. $Y \leq m$ は m より大きい玉を一度も引かない事象, $X \leq m$ の余事象は大きい玉を 2 個手元へ取り込む事象である. 大きい玉を 0 個・1 個だけ取り込む確率を数える.

【解答】

手元の 2 個は, 操作で現れた玉のうち番号が大きい 2 個である.

(1) $Y \leq m$ であるための必要十分条件は, 番号が m より大きい玉を一度も取り出さないことである. そのような玉は箱に $N+2-m$ 個あり, 事象が続く限り個数は変わらない. 従って各回に許される玉は $m-2$ 個で,

$$P(Y \leq m) = \left(\frac{m-2}{N} \right)^n.$$

(2) $H = N + 2 - m$, $A = m - 2$ とおく。 $X \leq m$ は、番号が m より大きい玉を手元へ取り込む回数が 0 回または 1 回である事象である。

0 回の確率は $(A/N)^n$ である。最初の大きい玉を第 j 回に引き、その後は残る $H - 1$ 個を引かない確率を足すと、ちょうど 1 個を取り込む確率は

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{A}{N}\right)^{j-1} \frac{H}{N} \left(\frac{A+1}{N}\right)^{n-j} = \frac{H\{(A+1)^n - A^n\}}{N^n}.$$

従って

$$P(X \leq m) = \frac{(N+2-m)(m-1)^n - (N+1-m)(m-2)^n}{N^n}.$$

【総評】 箱の内容が変化する確率過程を閾値だけで追う難問で目安は 22 分。大きい玉を 1 個取ると箱内の大きい玉が 1 個減り、以後の回避確率が変わる点が核心である。条件を使う箇所、途中計算、端点や等号の判定まで答案に明記すれば、論理を失わず完答できる。

【第 6 問】

$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とし、空間内の原点 O と 4 つの点

$$A(1, 1, 1), \quad B(-a^{-1}, a, 0), \quad C(-a, 0, a^{-1}), \quad D(0, -a^{-1}, a)$$

について、次の問に答えよ。

- (1) 4 点 A, B, C, D は正方形の頂点であることを示せ。
- (2) 四角錐 $O - ABCD$ を平面 $x = 0$ によって 2 つの部分 W_1, W_2 に分けたとき、 W_1, W_2 の体積の比を求めよ。

【方針】

$a^2 = a + 1$, $a^{-1} = a - 1$ を使って隣接辺ベクトルの長さと内積を調べる。(2) は切断面が頂点 O を通るため、体積比を底面の正方形が $x = 0$ で分けられる面積比へ帰着する。

【解答】

$a^2 = a + 1$, $a^{-1} = a - 1$, $a - a^{-1} = 1$ を用いる。

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (-a, a^{-1}, -1), \quad \overrightarrow{BC} = (-1, -a, a^{-1}).$$

従って

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a - 1 - a^{-1} = 0$$

であり、両ベクトルの長さは等しい。また

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}.$$

よって $ABCD$ は 4 辺が等しく隣接辺が直交する平行四辺形、すなわち正方形である。

(2) 平面 $x = 0$ は頂点 O を通るので、2 部分の体積比は底面正方形 $ABCD$ が直線 $x = 0$ で分けられる面積比に等しい。

点 D は $x = 0$ 上にある。辺 AB と $x = 0$ の交点を E とする。 A の x 座標は 1、 B は $-a^{-1}$ だから

$$\frac{AE}{AB} = \frac{1}{1 + a^{-1}} = \frac{1}{a}.$$

$x \geq 0$ 側の底面は直角三角形 ADE で、その面積の正方形全体に対する比は

$$\frac{1}{2} \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2a}.$$

他方は $1 - \frac{1}{2a} = \frac{2a-1}{2a}$ であり、 $2a-1 = \sqrt{5}$ である。従って小さい部分と大きい部分の体積比は

$$1 : \sqrt{5}.$$

【総評】 黄金比座標の正方形と錐体切断を組み合わせる難問で目安は 22 分。切断平面が頂点を通るため体積比が底面積比になることと、交点の内分比を座標から求めることが重要である。