

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1992 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

空間内の 6 つの点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $F(0, 0, -1)$ を頂点とする正八面体を, 平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ で切るとき, 切り口の多角形の頂点の座標を求めよ. ただし, a , b , c は正の定数とする.

第 2 問

θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の角とする.

(1) $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ を満たす θ を求めよ.

(2) m, n を 0 以上の整数とする. θ についての方程式 $\sin 3\theta = m \sin 2\theta + n \sin \theta$ が解を持つときの (m, n) と, そのときの解 θ を求めよ.

第 3 問

$\triangle ABC$ の外心 O から直線 BC , CA , AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P , Q , R とするとき, $\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OR} = \vec{0}$ が成立しているとする.

(1) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の関係式を求めよ.

(2) $\angle A$ の大きさを求めよ.

第 4 問

サイコロをくり返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする. すなわち, k 回目に出た目の数を Y_k とすると, $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$

- (1) X が 3 で割りきれる確率 p_n を求めよ.
- (2) X が 6 で割りきれる確率 q_n を求めよ.

第 5 問

空間内で zx -平面上の放物線 $z = 1 - x^2$ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面に 4 点 $(t, 0, 1 - t^2)$, $(-t, 0, 1 - t^2)$, $(0, t, 1 - t^2)$, $(0, -t, 1 - t^2)$ (ただし, $0 < t < 1$) で, それぞれ接する 4 つの平面を考える.

- (1) この 4 つの接平面と xy -平面で囲まれる立体の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (2) $V(t)$ の最小値と, そのときの t の値を求めよ.

第 6 問

a_1, b_1, c_1 は正の整数で $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$ を満たしている. $n = 1, 2, \dots$ について, $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を次式で定める.

$$a_{n+1} = |2c_n - a_n - 2b_n|$$

$$b_{n+1} = |2c_n - 2a_n - b_n|$$

$$c_{n+1} = 3c_n - 2a_n - 2b_n$$

- (1) $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$ を数学的帰納法により証明せよ.
- (2) $c_n > 0$ および $c_n \geq c_{n+1}$ を示せ.
- (3) $c_m > c_{m+1} = c_{m+2}$ となったときの m について, $a_m : b_m : c_m$ を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)