

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1993 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が次の 3 条件を満たしているとする.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - x} = 1$

(2) 曲線 $y = f(x)$ の $x = 0$ における接線の傾きは負である.

(3) 2 点 $(0, f(0))$ と $(1, f(1))$ を通る直線を l とする. 曲線 $y = f(x)$ と直線 l で囲まれる図形のうち, $0 \leq x \leq 1$ の部分の面積は $\frac{3}{4}$ である.

このとき, a , b , c の値を求めよ.

第 2 問

実数 a に対して、 $f(x) = x^3 - 3ax$ とおく.

- (1) t を実数とする. 方程式 $f(x) = t$ が相異なる 3 個の実数解を持つために a と t が満たすべき条件を求めよ.
- (2) $g(x) = f(f(x))$ とおく. 方程式 $g(x) = 0$ が相異なる 9 個の実数解を持つような a の範囲を求めよ.

第 3 問

原点 O を中心とする 1 つの円周上に相異なる 4 点 A_0, B_0, C_0, D_0 をとる. A_0, B_0, C_0, D_0 の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ と書く.

- (1) $\triangle B_0C_0D_0, \triangle C_0D_0A_0, \triangle D_0A_0B_0, \triangle A_0B_0C_0$ の重心をそれぞれ A_1, B_1, C_1, D_1 とする. このとき, この 4 点は同一円周上にあることを示し, その円の中心 P_1 の位置ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ.
- (2) 4 点 A_1, B_1, C_1, D_1 に対し上と同様に A_2, B_2, C_2, D_2 を定め, A_2, B_2, C_2, D_2 を通る円の中心を P_2 とする. 以下, 同様に $P_3, P_4, \dots$ を定める. $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_nQ| = 0$ を満たす点 Q の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ. ただし, $|P_nQ|$ は線分 P_nQ の長さである.

第 4 問

a は正の定数とする. 不等式 $a^x \geq ax$ がすべての正の数 x に対して成り立つという. このとき a はどのようなものか.

第 5 問

$n \geq 3$ とする. $1, 2, \dots, n$ のうちから重複を許して 6 個の数字をえらびそれを並べた順列を考える. このような順列のうちで, どの数字もそれ以外の 5 つの数字のどれかに等しくなっているようなものの個数を求めよ.

第 6 問

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ を実数とする. 不等式 $\frac{a_1x + b_1}{x + c_1} > \frac{a_2x + b_2}{x + c_2}$ が $x \neq -c_1$ かつ $x \neq -c_2$ となるすべての実数 x に対して成立するための必要十分条件を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)