

京都大学 1993 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が次の 3 条件を満たしているとする.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - x} = 1$
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の $x = 0$ における接線の傾きは負である.
- (3) 2 点 $(0, f(0))$ と $(1, f(1))$ を通る直線を l とする. 曲線 $y = f(x)$ と直線 l で囲まれる図形のうち, $0 \leq x \leq 1$ の部分の面積は $\frac{3}{4}$ である.

このとき, a, b, c の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

極限条件から $f(1) = 0, f'(1) = 2$ を得る. 接線条件で係数の範囲を絞ると、曲線と弦の上下関係が区間全体で確定するため、絶対値を外して面積を計算する。

【解答】

(1) 分母は $x = 1$ で 0 になるので、極限が有限であるには $f(1) = 0$ が必要である。また

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - x} = \frac{f'(1)}{3 - 1} = 1$$

より $f'(1) = 2$ である。したがって

$$1 + a + b + c = 0, \quad 3 + 2a + b = 2.$$

これより $b = -1 - 2a, c = a$ を得る。(2)

$x = 0$ における接線の傾きは $f'(0) = b$ だから、条件 (2) より $a > -1/2$ である。

(3)

弦 l は $(0, a), (1, 0)$ を通るので $y = a(1 - x)$ である。曲線との差は

$$f(x) - a(1 - x) = x(x - 1)(x + a + 1).$$

$0 \leq x \leq 1$ かつ $a > -1/2$ より、この差は 0 以下である。よって面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{a(1 - x) - f(x)\} dx &= \int_0^1 x(1 - x)(x + a + 1) dx \\ &= \frac{1}{12} + \frac{a + 1}{6} = \frac{2a + 3}{12}. \end{aligned}$$

これが $3/4$ だから $2a + 3 = 9$ 、従って

$$a = 3, \quad b = -7, \quad c = 3.$$

▶ 解法 2

【方針】

分母 $x^3 - x$ との差を取る。極限が 1 である条件を「差が $x = 1$ で 2 重零点をもつ」と読み替え、3 次式を 1 変数で表示して接線・面積条件を処理する。

【解答】

(1) (1)

$$h(x) = f(x) - (x^3 - x) = ax^2 + (b+1)x + c$$

とおく。条件 (1) は

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{x^3 - x} = 0$$

を意味する。分母は $x = 1$ で 1 次の零点をもつので、2 次式 h は $x = 1$ で少なくとも 2 重の零点をもつ。よって

$$h(x) = a(x-1)^2.$$

したがって

$$f(x) = x^3 - x + a(x-1)^2, \quad b = -1 - 2a, \quad c = a.$$

(2) (2) $f'(0) = b < 0$ から $a > -1/2$ である。

(3) (3) 端点を結ぶ直線は $l(x) = a(1-x)$ で、

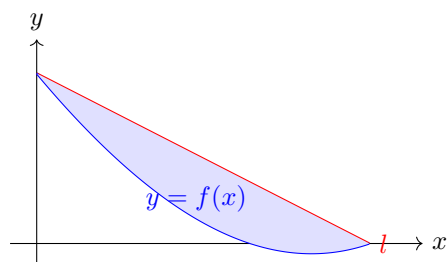
$$l(x) - f(x) = x(1-x)(x+a+1).$$

$0 \leq x \leq 1$ 、 $a > -1/2$ では右辺は非負だから、面積条件は

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \int_0^1 x(1-x)(x+a+1) dx \\ &= \frac{1}{12} + \frac{a+1}{6} = \frac{2a+3}{12}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$a = 3, \quad b = -7, \quad c = 3.$$



【総評】 極限、接線、面積を順に結ぶ標準上位問題で目安は 15 分。面積を計算する前に因数分解で曲線と弦の上下を確定することが主な採点点である。方針だけでなく、条件を使う箇所、途中式、等号・境界の判定まで答案に明記することが安定得点につながる。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式も併記している。

【第 2 問】

実数 a に対して, $f(x) = x^3 - 3ax$ とおく.

- (1) t を実数とする. 方程式 $f(x) = t$ が相異なる 3 個の実数解を持つために a と t が満たすべき条件を求めよ.
 (2) $g(x) = f(f(x))$ とおく. 方程式 $g(x) = 0$ が相異なる 9 個の実数解を持つような a の範囲を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

三次関数の極大値・極小値から水平線との交点数を判定する。(2) は $f(f(x)) = 0$ を、 $f(x)$ が $f(u) = 0$ の 3 根を取る 3 本の方程式に分け、それぞれが 3 実根を持つ条件にする。

【解答】

(1) $f'(x) = 3(x^2 - a)$ である。 $a \leq 0$ では f は単調増加で、相異なる 3 実根をもたない。 $a > 0$ では $x = -\sqrt{a}$ で極大値 $2a^{3/2}$ 、 $x = \sqrt{a}$ で極小値 $-2a^{3/2}$ をとる。よって必要十分条件は

$$a > 0, \quad |t| < 2a^{3/2}.$$

(2) $a > 0$ のとき、 $f(u) = 0$ の根は

$$u = 0, \quad u = \sqrt{3a}, \quad u = -\sqrt{3a}$$

である。したがって $f(f(x)) = 0$ が 9 個の相異なる実根をもつには、3 つの方程式

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \sqrt{3a}, \quad f(x) = -\sqrt{3a}$$

がそれぞれ相異なる 3 実根をもつことが必要十分である。(1) より

$$\sqrt{3a} < 2a^{3/2}.$$

$a > 0$ で割ると $a > \sqrt{3}/2$ となる。3 本の方程式の解集合は互いに交わらないので、求める範囲は

$$a > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

f のグラフと水平線の交点数を図で整理する。合成方程式では外側の零点 3 個を水平線の高さとみなし、それぞれの逆像が 3 個ずつ得られる条件を課す。

【解答】

(1) (1) $a \leq 0$ では $f'(x) = 3(x^2 - a) \geq 0$ なので 3 交点は生じない。 $a > 0$ では

$$f(-\sqrt{a}) = 2a^{3/2}, \quad f(\sqrt{a}) = -2a^{3/2}.$$

よって水平線 $y = t$ が 3 点で交わる条件は

$$a > 0, \quad |t| < 2a^{3/2}.$$

(2) (2) また $f(u) = 0$ の 3 根は

$$u = 0, \quad u = \pm\sqrt{3a}.$$

$f(f(x)) = 0$ の解は、グラフと 3 本の水平線

$$y = 0, \quad y = \sqrt{3a}, \quad y = -\sqrt{3a}$$

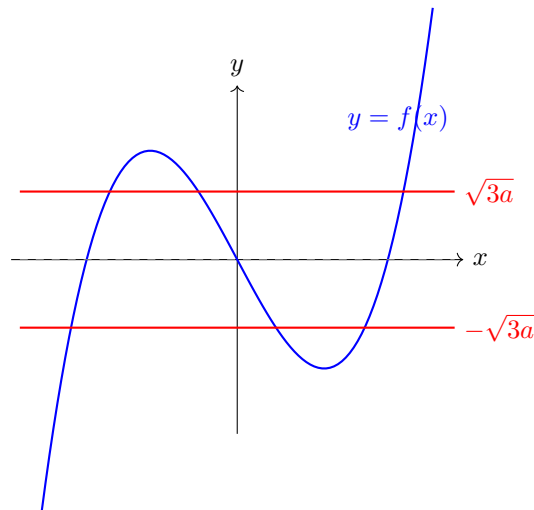
との交点の x 座標である。高さが異なるので 3 組の解は重ならない。各水平線が 3 交点をもつための条件は

$$\sqrt{3a} < 2a^{3/2}.$$

$a > 0$ のもとで整理すると

$$a > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

等号では上下の水平線が極値で接して重解を生むため除く。



【総評】 三次関数の交点数を合成関数へ拡張する難問で目安は 18 分。等号では重解が生じるため不等号を厳密にし、3 つの値の逆像が互いに異なることも確認する。方針だけでなく、条件を使う箇所、途中式、等号・境界の判定まで答案に明記することが安定得点につながる。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式も併記している。

【第 3 問】

原点 O を中心とする 1 つの円周上に相異なる 4 点 A_0, B_0, C_0, D_0 をとる。 A_0, B_0, C_0, D_0 の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ と書く。

- (1) $\triangle B_0C_0D_0, \triangle C_0D_0A_0, \triangle D_0A_0B_0, \triangle A_0B_0C_0$ の重心をそれぞれ A_1, B_1, C_1, D_1 とする。このとき、この 4 点は同一円周上にあることを示し、その円の中心 P_1 の位置ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ。
- (2) 4 点 A_1, B_1, C_1, D_1 に対し上と同様に A_2, B_2, C_2, D_2 を定め、 A_2, B_2, C_2, D_2 を通る円の中心を P_2 とする。以下、同様に $P_3, P_4, \dots$ を定める。 $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_nQ| = 0$ を満たす点 Q の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ。ただし、 $|P_nQ|$ は線分 P_nQ の長さである。

▶ 解法 1

【方針】

4 位置ベクトルの和を $\vec{s}$ と置く。重心操作は各点を $\vec{s}/3$ を中心に比 $-1/3$ で移すので、円の中心にも同じ一次漸化式が成り立つ。これを解いて増分と極限を求める。

【解答】

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ とおく。

(1) 各重心の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\vec{s} - \vec{a}}{3}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \frac{\vec{s} - \vec{b}}{3}, \quad \text{以下同様}$$

である。点 P_1 を $\overrightarrow{OP_1} = \vec{s}/3$ とすると

$$\overrightarrow{P_1A_1} = -\frac{\vec{a}}{3}, \quad \overrightarrow{P_1B_1} = -\frac{\vec{b}}{3}, \quad \text{以下同様}$$

であり、4 本の長さは等しい。従って 4 点は中心 P_1 の同一円周上にあり、

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}.$$

(2) 各段階でも 4 点の位置ベクトルの和は $\vec{s}$ のままである。中心の位置ベクトルを $\vec{p}_n = \overrightarrow{OP_n}$ 、また $\vec{p}_0 = \vec{0}$ とすると

$$\vec{p}_{n+1} = \frac{\vec{s}}{3} - \frac{\vec{p}_n}{3}.$$

この漸化式を解くと

$$\vec{p}_n = \frac{\vec{s}}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}.$$

よって

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}).$$

(3) 上式から $\vec{p}_n \rightarrow \vec{s}/4$ である。従って

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

▶ 解法 2

【方針】

4 点の和を $\mathbf{s}$ とし、1 回の重心操作を 1 つの相似変換 $T(\mathbf{x}) = \mathbf{s}/3 - \mathbf{x}/3$ として捉える。固定点からの変位を反転しつつ 3 分の 1 にすることから、中心列と極限を一度に求める。

【解答】

(1) (1)

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$$

とおく。1 回の操作で、たとえば $\mathbf{a}$ は

$$T(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{s} - \mathbf{a}}{3}$$

へ移る。4 点すべてに同じ相似変換

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{s}}{3} - \frac{\mathbf{x}}{3}$$

が作用する。したがって原円の中心 $\mathbf{0}$ も

$$\mathbf{p}_1 = T(\mathbf{0}) = \frac{\mathbf{s}}{3}$$

へ移り、半径は $1/3$ 倍になる。これで (1) が示される。

(2) (2) T の固定点 $\mathbf{q}$ は

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{s}}{3} - \frac{\mathbf{q}}{3}$$

より $\mathbf{q} = \mathbf{s}/4$ である。さらに

$$T(\mathbf{x}) - \mathbf{q} = -\frac{1}{3}(\mathbf{x} - \mathbf{q}).$$

よって中心の位置ベクトルは

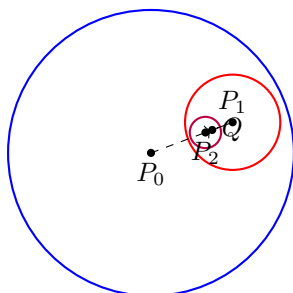
$$\mathbf{p}_n = \mathbf{q} + \left(-\frac{1}{3} \right)^n (\mathbf{0} - \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{s}}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}.$$

したがって

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \mathbf{s}.$$

(3) 上式から $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{q}$ である。ゆえに

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\mathbf{s}}{4}.$$



中心は Q をはさんで比 $1/3$ で近づく

【総評】 図形操作をベクトル漸化式へ移す上位問題で目安は 20 分。4 点の和が保存されること、円の中心にも相似変換が作用することを明確にするのが核心である。方針だけでなく、条件を使う箇所、途中式、等号・境界の判定まで答案に明記することが安定得点につながる。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式も併記している。

【第 4 問】

a は正の定数とする。不等式 $a^x \geq ax$ がすべての正の数 x に対して成り立つという。このとき a はどのようなものか。

▶ 解法 1

【方針】

対数を取って $F(x) = (x-1)\log a - \log x$ と置く。すべての正数で $F(x) \geq 0$ かつ $F(1) = 0$ なので、 $x = 1$ が極小となるための微分条件から a を一意に決め、指数関数の基本不等式で十分性を示す。

【解答】

条件は

$$a^{x-1} \geq x \quad (x > 0)$$

と同値である。対数を取って

$$F(x) = (x-1)\log a - \log x$$

とおくと、すべての $x > 0$ で $F(x) \geq 0$ かつ $F(1) = 0$ である。従って $x = 1$ は極小点であり、

$$F'(1) = \log a - 1 = 0.$$

よって必要条件は $a = e$ である。

逆に $a = e$ のとき、示すべき式は $e^{x-1} \geq x$ である。 $H(x) = e^{x-1} - x$ とおけば

$$H'(x) = e^{x-1} - 1$$

なので $x = 1$ で最小値 0 をとる。従ってすべての正数 x で成立する。求める定数は

$$a = e$$

だけである。

▶ 解法 2

【方針】

条件を $a^{x-1} \geq x$ へ直し、 $x > 1$ と $0 < x < 1$ でそれぞれ a の上下界を取る。 $x \rightarrow 1$ の極限で必要値を挟み、基本不等式で十分性を確認する。

【解答】

条件は

$$a^{x-1} \geq x \quad (x > 0)$$

と同値である。 $x > 1$ では正の $x-1$ 乗根を取って

$$a \geq x^{1/(x-1)}.$$

$x \rightarrow 1+0$ とすると

$$a \geq e.$$

一方 $0 < x < 1$ では指数 $x-1$ が負なので、

$$a \leq x^{1/(x-1)}.$$

$x \rightarrow 1-0$ として

$$a \leq e.$$

ゆえに必要条件は $a = e$ である。

逆に $a = e$ とする。関数

$$\phi(x) = x - 1 - \log x$$

は

$$\phi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

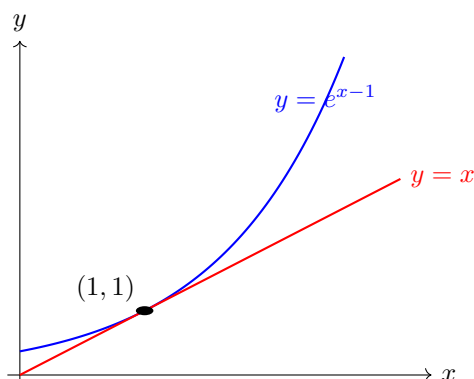
より $x = 1$ で最小値 0 を取る。したがって $\log x \leq x - 1$ 、すなわち

$$x \leq e^{x-1}.$$

よって条件はすべての $x > 0$ で成り立つ。結論は

$$a = e$$

だけである。



【総評】 全称不等式から接点条件を取り出す問題で目安は 12 分。 $x = 1$ で常に等号となることに気づき、必要性だけでなく $a = e$ の十分性も示す必要がある。方針だけでなく、条件を使う箇所、途中式、等号・境界の判定まで答案に明記することが安定得点につながる。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式も併記している。

【第 5 問】

$n \geq 3$ とする。 $1, 2, \dots, n$ のうちから重複を許して 6 個の数字をえらびそれを並べた順列を考える。このような順列のうちで、どの数字もそれ以外の 5 つの数字のどれかに等しくなっているようなものの個数を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各数字の出現回数に 1 がないことが条件である。6 の分割のうち各部分が 2 以上となる $6, 4+2, 3+3, 2+2+2$ に分け、数字の選択と並べ方を掛ける。

【解答】

使われる数字の出現回数はすべて 2 以上で、合計が 6 である。可能な型は

$$6, \quad 4+2, \quad 3+3, \quad 2+2+2$$

だけである。

それぞれの個数は

$$\begin{aligned} n, \\ n(n-1) \frac{6!}{4!2!} &= 15n(n-1), \\ {}_nC_2 \frac{6!}{3!3!} &= 10n(n-1), \\ {}_nC_3 \frac{6!}{2!2!2!} &= 15n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

である。従って総数は

$$n + 25n(n-1) + 15n(n-1)(n-2) = 15n^3 - 20n^2 + 6n.$$

▶ 解法 2

【方針】

使われる相異なる数字の個数を 1 個、2 個、3 個に分ける。2 個の場合は全 2 色列から一方が 1 回だけまたは全く現れない列を除き、3 個の場合は各 2 回と確定する。

【解答】

条件より、使われる各数字は少なくとも 2 回現れる。したがって相異なる数字の個数は 1, 2, 3 のいずれかである。

1 個だけなら、数字の選び方から n 個である。

2 個なら、数字の組は ${}_nC_2$ 通り。固定した 2 数字による長さ 6 の列は 2^6 個ある。このうち一方が 0 回の列は 2 個、一方が 1 回の列は

$$2 \cdot {}_6C_1 = 12$$

個なので、条件を満たす列は

$$2^6 - 2 - 12 = 50$$

個である。寄与は $50 {}_nC_2 = 25n(n-1)$ 。

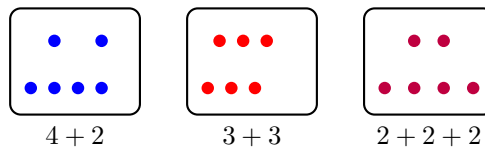
3 個なら各数字がちょうど 2 回である。よって

$${}_nC_3 \frac{6!}{2!2!2!} = 15n(n-1)(n-2).$$

以上の和は

$$n + 25n(n-1) + 15n(n-1)(n-2) = 15n^3 - 20n^2 + 6n.$$

出現回数に 1 を含まない型



【総評】 重複順列を出現回数で分類する標準上位問題で目安は 12 分。4+2 では役割が異なるため数字の選択が順序付きになる一方、3+3 と 2+2+2 では組合せで選ぶ点に注意する。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式も併記している。

【第 6 問】

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ を実数とする。不等式 $\frac{a_1x + b_1}{x + c_1} > \frac{a_2x + b_2}{x + c_2}$ が $x \neq -c_1$ かつ $x \neq -c_2$ となるすべての実数 x に対して成立するための必要十分条件を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

分母の極の位置 c_1, c_2 が一致するかで分ける。異なる極では各分数の分子がその極で 0 にならなければ符号が左右で反転する。一致する極では差の一次分子が分母の正の定数倍となることが必要十分である。

【解答】

まず $c_1 \neq c_2$ とする。 $x = -c_1$ の両側で第 1 の分数だけが発散する。すべての定義点で同じ向きの不等式が成り立つには、その分子が $x = -c_1$ で 0 でなければならない。従って

$$b_1 = a_1c_1.$$

同様に $x = -c_2$ から $b_2 = a_2c_2$ が必要である。このとき各分数は定義域でそれぞれ定数 a_1, a_2 となるから、さらに $a_1 > a_2$ が必要十分である。

次に $c_1 = c_2 = c$ とする。差は

$$\frac{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)}{x + c}.$$

これがすべての $x \neq -c$ で正となるには、分子が分母の正の定数倍であることが必要十分である。従って

$$a_1 > a_2, \quad b_1 - b_2 = (a_1 - a_2)c.$$

以上より必要十分条件は

$$\begin{cases} c_1 \neq c_2, \quad b_1 = a_1 c_1, \quad b_2 = a_2 c_2, \quad a_1 > a_2, \\ \text{または} \\ c_1 = c_2 = c, \quad a_1 > a_2, \quad b_1 - b_2 = (a_1 - a_2)c \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

2 つの分数の差を通分する。分母の符号が極を通るたび変わるため、分子も同じ極で零にならないことを符号表から導き、係数を比較する。

【解答】

差を通分して

$$\frac{D(x)}{(x + c_1)(x + c_2)}$$

と書く。ただし

$$D(x) = (a_1 x + b_1)(x + c_2) - (a_2 x + b_2)(x + c_1).$$

$c_1 \neq c_2$ とする。分母は $x = -c_1, -c_2$ を通るたび符号を変える。商がすべての定義点で正なら、連続な多項式 $D(x)$ も両点で零となり、分母と同じ符号変化をしなければならない。よって

$$D(-c_1) = 0, \quad D(-c_2) = 0.$$

これらは

$$b_1 = a_1 c_1, \quad b_2 = a_2 c_2$$

と同値である。このとき

$$D(x) = (a_1 - a_2)(x + c_1)(x + c_2)$$

だから、商が正である条件は $a_1 > a_2$ である。

$c_1 = c_2 = c$ なら差は

$$\frac{(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2}{x + c}.$$

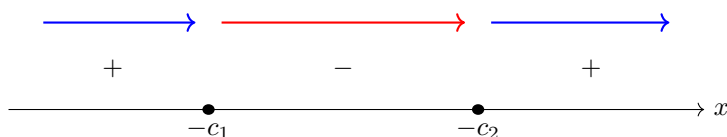
分子と分母が同じ点で符号を変え、商が常に正となる必要十分条件は、ある $K > 0$ について分子が $K(x + c)$ に等しいことである。したがって

$$a_1 > a_2, \quad b_1 - b_2 = (a_1 - a_2)c.$$

結論は

$$\begin{cases} c_1 \neq c_2, \quad b_1 = a_1 c_1, \quad b_2 = a_2 c_2, \quad a_1 > a_2, \\ \text{または} \\ c_1 = c_2 = c, \quad a_1 > a_2, \quad b_1 - b_2 = (a_1 - a_2)c. \end{cases}$$

分子も同じ 2 点で符号を変える必要がある



【総評】 極の近傍での符号変化を扱う難問で目安は 20 分。単に通分して二次不等式にせず、除外点の左右で発散項の符号が変わることを必要条件として使うのが核心である。方針だけでなく、条件を使う箇所、途中式、等号・境界の判定まで答案に明記することが安定得点につながる。2 解法の結論を照合し、定義域、端点、必要十分性、等号条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式も併記している。