

# 入 学 試 験 問 題

## 数 学



京 都 大 学 1995 年 度 文 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

自然数  $n$  に対して、 $x^n$  を  $x^2 + ax + b$  で割った余りを  $r_n x + s_n$  とする. 次の 2 条件 (イ), (ロ) を考える.

(イ)  $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$ ,  $\alpha > \beta > 0$  と表せる.

(ロ) すべての自然数  $n$  に対して  $r_n < r_{n+1}$  が成り立つ.

- (1) (イ), (ロ) がみたされるとき, すべての自然数  $n$  に対して  $\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1)$  が成り立つことを示せ.
- (2) 実数  $a, b$  がどのような範囲にあるとき (イ), (ロ) がみたされるか. 必要十分条件を求め, 点  $(a, b)$  の存在する範囲を図示せよ.

## 第 2 問

$O$  を中心とする円周上に相異なる 3 点  $A_0, B_0, C_0$  が時計回りの順に置かれている. 自然数  $n$  に対し, 点  $A_n, B_n, C_n$  を次の規則で定めていく.

- (イ)  $A_n$  は弧  $A_{n-1}B_{n-1}$  を 2 等分する点である. (ここで弧  $A_{n-1}B_{n-1}$  は他の点  $C_{n-1}$  を含まないほうを考える. 以下においても同様である.)
- (ロ)  $B_n$  は弧  $B_{n-1}C_{n-1}$  を 2 等分する点である.
- (ハ)  $C_n$  は弧  $C_{n-1}A_{n-1}$  を 2 等分する点である.

$\angle A_nOB_n$  の大きさを  $\alpha_n$  とする. ただし,  $\angle A_nOB_n$  は点  $C_n$  を含まないほうの弧  $A_nB_n$  の中心角を表す.

- (1) すべての自然数  $n$  に対して  $4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi$  であることを示せ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して  $\alpha_{n+2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{n-1}$  であることを示せ.
- (3)  $\alpha_{3n}$  を  $\alpha_0$  で表せ.

### 第 3 問

$a, b, c$  は実数で  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$  とする.

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad q(x) = cx^2 + bx + a$$

とおく.  $-1 \leq x \leq 1$  をみたすすべての  $x$  に対して  $|p(x)| \leq 1$  が成り立つとき,  $-1 \leq x \leq 1$  をみたすすべての  $x$  に対して  $|q(x)| \leq 1$  が成り立つことを示せ.

## 第 4 問

自然数  $n$  の関数  $f(n)$ ,  $g(n)$  を

$f(n) = n$  を 7 で割った余り,

$$g(n) = 3f\left(\sum_{k=1}^7 k^n\right)$$

によって定める.

- (1) すべての自然数  $n$  に対して  $f(n^7) = f(n)$  を示せ.
- (2) あなたの好きな自然数  $n$  を一つ決めて  $g(n)$  を求めよ. その  $g(n)$  の値をこの設問 (2) におけるあなたの得点とする.

## 第 5 問

$A$  と  $B$  の 2 人が次のようなゲームを行う。  $A$  はそれぞれ  $0, 1, 2, 3$  と書かれた 4 枚の札をもっている。  $B$  はそれぞれ  $1, 2, 3$  と書かれた 3 枚の札をもっているとする。 第 1 回目に  $B$  が  $A$  の持札から 1 枚の札をとり、もし番号が一致する札があればその 2 枚の札をその場に捨てる。番号が一致しない札はそのまま持ち続ける。次に  $A$  が  $B$  の持札から 1 枚の札をとり、 $B$  と同じ手続きをする。こうして一方の札がなくなるまでゲームを続ける。ただし相手の札をとるとき、どの札も等しい確率でとるものとする。

$B$  が 2 回目の手続きを終えたとき、場に捨てられた札の総数を  $2X$  とする。確率変数  $X$  の分布を求めよ。

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)