

京都大学 1995 年度 文系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

自然数 n に対して, x^n を $x^2 + ax + b$ で割った余りを $r_n x + s_n$ とする. 次の 2 条件 (イ), (ロ) を考える.

(イ) $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha > \beta > 0$ と表せる.

(ロ) すべての自然数 n に対して $r_n < r_{n+1}$ が成り立つ.

(1) (イ), (ロ) がみたされるとき, すべての自然数 n に対して $\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1)$ が成り立つことを示せ.

(2) 実数 a, b がどのような範囲にあるとき (イ), (ロ) がみたされるか. 必要十分条件を求め, 点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ.

▶ 解法 1

【方針】

2 根へ余り式を代入して r_n を明示し、単調条件を根の不等式へ翻訳する。全 n での成立条件を根の 1 との大小で分類してから係数平面へ戻す。

【解答】

α, β を余り式へ代入すると

$$r_n \alpha + s_n = \alpha^n, \quad r_n \beta + s_n = \beta^n,$$

従って

$$r_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

(1) $r_{n+1} > r_n$ は

$$\alpha^n (\alpha - 1) > \beta^n (\beta - 1)$$

と同値である。 $\beta^n > 0$ で割れば

$$\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1).$$

(2) $\alpha > \beta > 0$ のもとで上の不等式がすべての n で成り立つ条件を調べる。 $\alpha \geq 1$ なら、 $\beta \leq 1$ では左辺が 0 以下・右辺が 0 以上、 $\beta > 1$ では $\alpha/\beta > 1$ かつ $\alpha - 1 > \beta - 1$ なので常に成り立つ。逆に $\alpha < 1$ なら $0 < \beta < \alpha < 1$ であり、条件は

$$(\alpha/\beta)^n (1 - \alpha) < 1 - \beta$$

となるが、左辺は $n \rightarrow \infty$ で発散するので不可能である。従って根での必要十分条件は

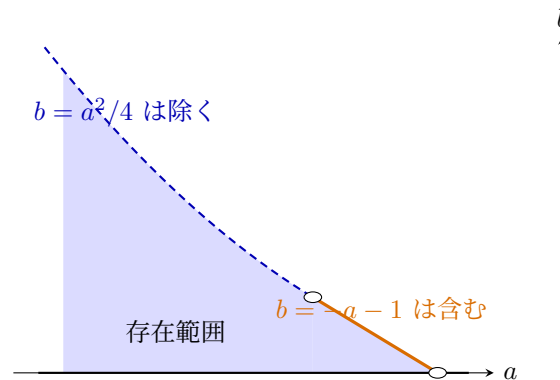
$$\alpha > \beta > 0, \quad \alpha \geq 1.$$

解と係数の関係から $a = -(\alpha + \beta) < 0, b = \alpha\beta > 0$ 、判別式 $a^2 - 4b > 0$ である。大きい根 $(-a + \sqrt{a^2 - 4b})/2 \geq 1$ を整理すると、 $a \leq -2$ では自動的に成り立ち、 $-2 < a < 0$ では $b \leq -a - 1$ となる。正值・判別式も合わせて

$$\begin{cases} a \leq -2, & 0 < b < a^2/4, \\ -2 < a < -1, & 0 < b \leq -a - 1. \end{cases}$$

これが求める範囲である。第 1 領域は放物線 $b = a^2/4$ の下側で放物線を含まず、第 2 領域は直線 $b = -a - 1$ 以下で直線を含む。

【 (a, b) の存在範囲】



▶ 解法 2

【方針】

$r_{n+1} - r_n$ を根 α, β で直接表す。全自然数 n で正となるかを $\alpha < 1$ と $\alpha \geq 1$ に分け、最後に大きい根の公式を係数条件へ直す。

【解答】

(1)

余りを 2 根へ代入すると

$$r_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

したがって

$$r_{n+1} - r_n = \frac{\alpha^n(\alpha - 1) - \beta^n(\beta - 1)}{\alpha - \beta}.$$

$\alpha - \beta > 0$ だから、増加条件は

$$\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1)$$

と同値であり、(1) を得る。

(2)

$\alpha \geq 1$ なら、 $\beta \leq 1$ の場合は左辺が 0 以下、右辺が 0 以上である。 $\beta > 1$ の場合も

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n > 1, \quad \alpha - 1 > \beta - 1$$

だから常に成立する。

逆に $\alpha < 1$ なら $0 < \beta < \alpha < 1$ であり、条件は

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (1 - \alpha) < 1 - \beta$$

となる。しかし $\alpha/\beta > 1$ なので左辺は n とともに限りなく大きくなり、全 n では成立しない。よって根に関する必要十分条件は

$$\alpha > \beta > 0, \quad \alpha \geq 1.$$

解と係数の関係から

$$a < 0, \quad b > 0, \quad a^2 - 4b > 0.$$

大きい根

$$\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

が 1 以上という条件を加える。 $a \leq -2$ なら自動的に成立する。 $-2 < a < 0$ では両辺を安全に平方でき

$$a^2 - 4b \geq (a + 2)^2$$

すなわち $b \leq -a - 1$ となる。 $b > 0$ も合わせると

$$\begin{cases} a \leq -2, & 0 < b < \frac{a^2}{4}, \\ -2 < a < -1, & 0 < b \leq -a - 1. \end{cases}$$

放物線境界は含まず、直線境界は含む。

【総評】 難度 8、計算量 7。余りの係数を根の冪差として表すことで、無限個の単調条件を $\alpha \geq 1$ の一条件へ集約した。係数平面へ戻す際は $a = -2$ を境に平方可能性が変わるため、境界の包含も分けて確認した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 2 問】

O を中心とする円周上に相異なる 3 点 A_0, B_0, C_0 が時計回りの順に置かれている。自然数 n に対し、点 A_n, B_n, C_n を次の規則で定めていく。

(イ) A_n は弧 $A_{n-1}B_{n-1}$ を 2 等分する点である。(ここで弧 $A_{n-1}B_{n-1}$ は他の点 C_{n-1} を含まないほうを考える。以下においても同様である。)

(ロ) B_n は弧 $B_{n-1}C_{n-1}$ を 2 等分する点である。

(ハ) C_n は弧 $C_{n-1}A_{n-1}$ を 2 等分する点である。

$\angle A_nOB_n$ の大きさを α_n とする。ただし、 $\angle A_nOB_n$ は点 C_n を含まないほうの弧 A_nB_n の中心角を表す。

(1) すべての自然数 n に対して $4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して $\alpha_{n+2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{n-1}$ であることを示せ。

(3) α_{3n} を α_0 で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

3 本の弧の中心角を置き、次段階の弧が隣り合う 2 弧の半分ずつからなることを使う。得た漸化式を 3 段ごとの一次漸化式へ変える。

【解答】

弧 A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n の中心角をそれぞれ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ とすると

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2\pi, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}.$$

(1) $\beta_{n-1} = 2\alpha_n - \alpha_{n-1}$ であり、また

$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}}{2} = \frac{2\pi - \alpha_{n-1}}{2}.$$

従って

$$2\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi - \frac{\alpha_{n-1}}{2},$$

すなわち

$$4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi.$$

(2) (1) を一つずらして

$$\alpha_{n+2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_{n+1}}{2} - \frac{\alpha_n}{4}.$$

ここへ $\alpha_{n+1} = \pi/2 + \alpha_n/2 - \alpha_{n-1}/4$ を代入すると

$$\alpha_{n+2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha_{n-1}}{8}.$$

(3) $u_n = \alpha_{3n}$ とおけば (2) より

$$u_{n+1} = \frac{3\pi}{4} - \frac{u_n}{8}.$$

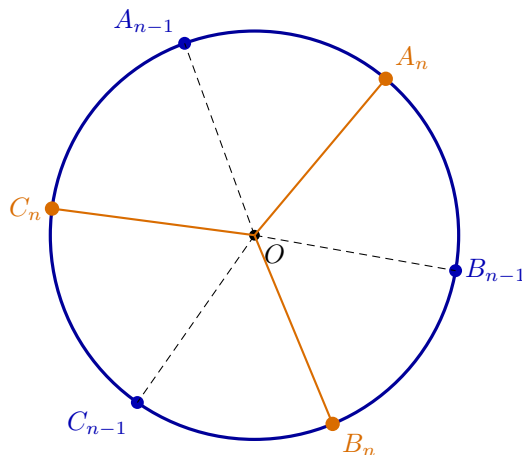
この漸化式の定常値は $2\pi/3$ なので

$$u_n - \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{8} \left(u_{n-1} - \frac{2\pi}{3} \right).$$

従って

$$\alpha_{3n} = \frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{1}{8} \right)^n \left(\alpha_0 - \frac{2\pi}{3} \right).$$

【3つの弧を同時に二等分する更新】



各新点は隣接する旧2点の弧の中点

▶ 解法 2

【方針】

3つの中心角をベクトルにまとめる。更新は一定の平均行列で表せるため、その3乗の第1行から3段ごとの漸化式を直接得る。

【解答】

弧 $A_n B_n, B_n C_n, C_n A_n$ の中心角を $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ とする。常に

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2\pi.$$

中点への移動から

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

(1)

第1式から $\beta_{n-1} = 2\alpha_n - \alpha_{n-1}$ である。また

$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}}{2} = \frac{2\pi - \alpha_{n-1}}{2}.$$

これを $2\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$ へ代入して

$$4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi.$$

(2)

上の整数行列を N とすると、直接計算により N^3 の第1行は

$$(2, 3, 3)$$

である。したがって

$$\alpha_{n+3} = \frac{2\alpha_n + 3\beta_n + 3\gamma_n}{8} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{8}.$$

n を $n-1$ に替えれば

$$\alpha_{n+2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha_{n-1}}{8}.$$

(3)

$u_n = \alpha_{3n}$ とおくと

$$u_{n+1} = \frac{3\pi}{4} - \frac{u_n}{8}.$$

定常値は $2\pi/3$ だから

$$u_{n+1} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{8} \left(u_n - \frac{2\pi}{3} \right).$$

よって

$$\alpha_{3n} = \frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{1}{8} \right)^n \left(\alpha_0 - \frac{2\pi}{3} \right).$$

【総評】 難度 7、計算量 5。点の位置ではなく 3 弧の中心角を状態変数にすると、各更新が隣接 2 成分の平均になる。(2) で中間項を消去し、3 段ごとの定常値 $2\pi/3$ と初期偏差を明示した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 3 問】

a, b, c は実数で $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ とする。

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad q(x) = cx^2 + bx + a$$

とおく。 $-1 \leq x \leq 1$ をみたすすべての x に対して $|p(x)| \leq 1$ が成り立つとき、 $-1 \leq x \leq 1$ をみたすすべての x に対して $|q(x)| \leq 1$ が成り立つことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

非負係数を利用して $p(1)$ から係数和を抑え、 q を各項の絶対値で評価する。

【解答】

$a, b, c \geq 0$ だから、 $x = 1$ において

$$0 \leq p(1) = a + b + c \leq 1.$$

任意の $-1 \leq x \leq 1$ について

$$\begin{aligned} |q(x)| &= |cx^2 + bx + a| \\ &\leq c|x|^2 + b|x| + a \\ &\leq c + b + a \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

したがって区間内のすべての x で

$$|q(x)| \leq 1$$

が成り立つ。仮定のうち $x = 1$ の場合だけで係数和を抑えられるのは、3 係数がすべて非負だからである。

▶ 解法 2

【方針】

$|q(x)|$ を、係数の非負性を利用して $q(|x|)$ で上から抑える。 $q(|x|)$ は係数和以下であり、その係数和は仮定を $x = 1$ に適用すれば直ちに得られる。

【解答】

$a, b, c \geq 0$ なので、任意の $|x| \leq 1$ に対して

$$|q(x)| \leq c|x|^2 + b|x| + a = q(|x|).$$

さらに $0 \leq |x| \leq 1$ より

$$q(|x|) \leq c + b + a.$$

一方、仮定を $x = 1$ に適用すると

$$|p(1)| = |a + b + c| \leq 1.$$

左辺の中は非負だから

$$a + b + c \leq 1.$$

以上をつなげて

$$|q(x)| \leq q(|x|) \leq a + b + c \leq 1.$$

【総評】 難度 4、計算量 3。係数がすべて非負という文系問題の追加条件により、仮定全体のうち $x = 1$ だけで係数和が 1 以下と分かる。絶対値評価では $|x|, |x|^2 \leq 1$ を順に用いた。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 4 問】

自然数 n の関数 $f(n)$, $g(n)$ を

$f(n) = n$ を 7 で割った余り,

$$g(n) = 3f\left(\sum_{k=1}^7 k^n\right)$$

によって定める。

- (1) すべての自然数 n に対して $f(n^7) = f(n)$ を示せ。
- (2) あなたの好きな自然数 n を一つ決めて $g(n)$ を求めよ。その $g(n)$ の値をこの設問 (2) におけるあなたの得点とする。

▶ 解法 1

【方針】

7 を法とするフェルマーの小定理を 0 の剰余も含めて用いる。(2) は得点を最大化するため指数を 6 の倍数に選ぶ。

【解答】

(1) n が 7 の倍数なら $n^7 \equiv n \equiv 0 \pmod{7}$ である。7 の倍数でなければフェルマーの小定理から $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$ なので、やはり $n^7 \equiv n \pmod{7}$ である。従って $f(n^7) = f(n)$ 。(2) $n = 6$ を選ぶ。 $k = 1, 2, \dots, 6$ について $k^6 \equiv 1 \pmod{7}$ 、 $7^6 \equiv 0 \pmod{7}$ だから

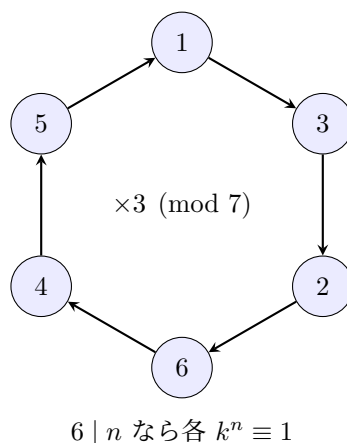
$$\sum_{k=1}^7 k^6 \equiv 6 \pmod{7}.$$

従って

$$g(6) = 3f\left(\sum_{k=1}^7 k^6\right) = 3 \cdot 6 = 18.$$

なお f の値は 0 から 6 なので、18 はこの設問で得られる最大得点でもある。

【7 を法とする非零剰余の 3 倍巡回】



► 解法 2

【方針】

(1) は 7 個の剰余を直接確認する。(2) では非零剰余全体を 3 倍しても並べ替わることを使い、べき和が 0 になる場合と 6 になる場合を分類する。最高得点になる指数を選ぶ。

【解答】

(1)

n の 7 による余りを r とする。 $r = 0$ なら $r^7 \equiv r \equiv 0 \pmod{7}$ である。 $r = 1, \dots, 6$ ならフェルマーの小定理より $r^6 \equiv 1 \pmod{7}$ だから

$$r^7 \equiv r \pmod{7}.$$

よって $n^7 \equiv n \pmod{7}$ 、すなわち

$$f(n^7) = f(n).$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^6 k^n$$

とおく。非零剰余 $1, \dots, 6$ は 3 倍しても並べ替わるので

$$S_n \equiv 3^n S_n \pmod{7}.$$

3 の 7 を法とする位数は 6 である。したがって $6 \nmid n$ なら $3^n \not\equiv 1 \pmod{7}$ となる場合に $S_n \equiv 0$ である。一方 $6 \mid n$ なら各 $k^n \equiv 1 \pmod{7}$ だから

$$S_n \equiv 6 \pmod{7}.$$

そこで $n = 6$ を選ぶ。 $7^6 \equiv 0 \pmod{7}$ も合わせて

$$f\left(\sum_{k=1}^7 k^6\right) = 6.$$

よって

$$g(6) = 3 \cdot 6 = 18.$$

f の値は 0 から 6 なので、これは可能な最高得点でもある。

【総評】 難度 4、計算量 3。0 剰余を小定理の対象外として別に処理した。(2) では非零剰余の 6 乗がすべて 1 になる指数を選び、単なる一例だけでなく得点 18 が上限に達することも確認した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 5 問】

A と B の 2 人が次のようなゲームを行う。 A はそれぞれ 0, 1, 2, 3 と書かれた 4 枚の札をもっている。 B はそれぞれ 1, 2, 3 と書かれた 3 枚の札をもっているとする。 第 1 回目に B が A の持札から 1 枚の札をとり、もし番号が一致する札があればその 2 枚の札をその場に捨てる。番号が一致しない札はそのまま持ち続ける。次に A が B の持札から 1 枚の札をとり、 B と同じ手続きをする。こうして一方の札がなくなるまでゲームを続ける。ただし相手の札をとるとき、どの札も等しい確率でとるものとする。

B が 2 回目の手続きを終えたとき、場に捨てられた札の総数を $2X$ とする。確率変数 X の分布を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

B の第 1 回で 0 を引くか否かを分け、続く A の手と B の第 2 回で一致が何回起こるかを状態ごとに数える。

【解答】

B の最初の手で 0 を引く確率は $1/4$ で、このとき一致は起こらない。続いて A が B から 0 を引く確率は $1/4$ である。この枝では両者の手札が初期状態へ戻った形になり、 B の第 2 回で 0 を引けば $X = 0$ 、1, 2, 3 を引けば $X = 1$ である。従って

$$P(X = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}.$$

最初に B が 0 を引き、次に A が 1, 2, 3 のいずれかを引く確率は $(1/4)(3/4)$ である。このとき A の手で 1 組、次の B の手でも必ず 1 組が一致するので $X = 2$ 。一方、最初に B が 1, 2, 3 のいずれかを引く確率は $3/4$ で、直ちに 1 組を捨てる。次の A の手でも必ず 1 組を捨てる。その後 B が持札 0 を引く確率と残る共通番号を引く確率は各 $1/2$ なので、 $X = 2, 3$ が各確率 $1/2$ で生じる。従って

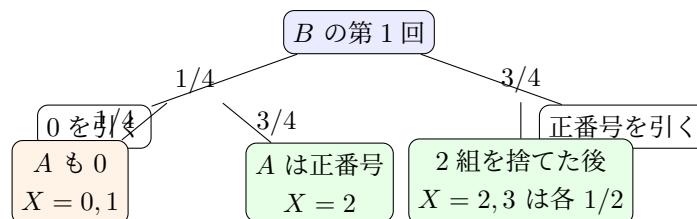
$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}, \quad P(X = 3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

以上より分布は

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$1/64$	$3/64$	$9/16$	$3/8$

である。4 確率の和は 1 になる。

【最初の 2 手による確率木】



▶ 解法 2

【方針】

最初の B の手、次の A の手、2 回目の B の手を「0 を引くか正番号を引くか」で確率木にする。各葉で成立した一致組数を数え、同じ X の葉を合算する。

【解答】

最初に B が 0 を引く確率は $1/4$ である。このとき A が 0 を引く確率も $1/4$ で、状態は最初と同じ形へ戻る。2 回目の B が 0 または正番号を引く確率はそれぞれ $1/4, 3/4$ だから

$$\Pr(X = 0) = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{64},$$

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{4} = \frac{3}{64}.$$

最初に B が 0、続いて A が正番号を引く確率は

$$\frac{1}{4} \frac{3}{4}.$$

A の手で 1 組を捨て、次の B の手でも残る正番号の 1 組を必ず捨てるので、この枝では $X = 2$ である。

最初に B が正番号を引く確率は $3/4$ である。直ちに 1 組を捨て、次の A の手でも必ず 1 組を捨てる。その後、 B は 0 と残る共通番号をそれぞれ確率 $1/2$ で引く。よってこの枝では $X = 2, 3$ が各確率 $1/2$ で生じる。

したがって

$$\Pr(X = 2) = \frac{1}{4} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{2} = \frac{9}{16},$$

$$\Pr(X = 3) = \frac{3}{4} \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

求める分布は

x	0	1	2	3
$\Pr(X = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$

であり、確率の和は 1 である。

【総評】 難度 7、計算量 6。手札の枚数が枝ごとに変わるため、単純な等確率列として数えず、各手番の条件付き確率を掛けた。最終分布は全状態の列挙でも照合し、確率和が 1 であることを確認した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。