

# 入 学 試 験 問 題

## 数 学



京 都 大 学 1995 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

自然数  $n$  に対して,  $x^n$  を  $x^2 + ax + b$  で割った余りを  $r_n x + s_n$  とする. 次の 2 条件 (イ), (ロ) を考える.

(イ)  $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$ ,  $\alpha > \beta > 0$  と表せる.

(ロ) すべての自然数  $n$  に対して  $r_n < r_{n+1}$  が成り立つ.

- (1) (イ), (ロ) がみたされるとき, すべての自然数  $n$  に対して  $\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1)$  が成り立つことを示せ.
- (2) 実数  $a, b$  がどのような範囲にあるとき (イ), (ロ) がみたされるか. 必要十分条件を求め, 点  $(a, b)$  の存在する範囲を図示せよ.

## 第 2 問

$O$  を中心とする円周上に相異なる 3 点  $A_0, B_0, C_0$  が時計回りの順に置かれている. 自然数  $n$  に対し, 点  $A_n, B_n, C_n$  を次の規則で定めていく.

- (イ)  $A_n$  は弧  $A_{n-1}B_{n-1}$  を 2 等分する点である. (ここで弧  $A_{n-1}B_{n-1}$  は他の点  $C_{n-1}$  を含まないほうを考える. 以下においても同様である.)
- (ロ)  $B_n$  は弧  $B_{n-1}C_{n-1}$  を 2 等分する点である.
- (ハ)  $C_n$  は弧  $C_{n-1}A_{n-1}$  を 2 等分する点である.

$\angle A_nOB_n$  の大きさを  $\alpha_n$  とする. ただし,  $\angle A_nOB_n$  は点  $C_n$  を含まないほうの弧  $A_nB_n$  の中心角を表す.

- (1) すべての自然数  $n$  に対して  $4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi$  であることを示せ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して  $\alpha_{n+2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{n-1}$  であることを示せ.
- (3)  $\alpha_{3n}$  を  $\alpha_0$  で表せ.

### 第 3 問

$a, b, c$  は実数で  $a \geq 0, b \geq 0$  とする.

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad q(x) = cx^2 + bx + a$$

とおく.  $-1 \leq x \leq 1$  をみたすすべての  $x$  に対して  $|p(x)| \leq 1$  が成り立つとき,  $-1 \leq x \leq 1$  をみたすすべての  $x$  に対して  $|q(x)| \leq 2$  が成り立つことを示せ.

## 第 4 問

- (1) 平面ベクトル  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  から 2 行 2 列の行列  $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$  をつくる.  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$

のどの一方も他方の実数倍ではないとき,  $P$  は逆行列をもつことを示せ.

- (2)  $B = \begin{pmatrix} p & b \\ c & -p \end{pmatrix}$  は単位行列の実数倍ではないとする. このとき, 設問 (1) のようにして作った  $P$  が逆行列  $P^{-1}$  をもち

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & p^2 + bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つようなベクトル  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  があることを示せ.

- (3)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  は単位行列の実数倍ではなく,  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  も単位行列の実数倍ではないとする.  $A$ ,  $A'$  が

$$a + d = a' + d', \quad ad - bc = a'd' - b'c'$$

をみたせば,  $P^{-1}AP = A'$  となる  $P$  があることを示せ.

## 第 5 問

$A$  と  $B$  の 2 人が次のようなゲームを行う.  $n$  を自然数とし,  $A$  はそれぞれ  $0, 1, 2, \dots, n$  と書かれた  $(n+1)$  枚の札をもっている.  $B$  はそれぞれ  $1, 2, \dots, n$  と書かれた  $n$  枚の札をもっているとする. 第 1 回目に  $B$  が  $A$  の持札から 1 枚の札をとり, もし番号が一致する札があればその 2 枚の札をその場に捨てる. 番号が一致しない札はそのまま持ち続ける. 次に  $B$  に持札があれば  $A$  が  $B$  の持札から 1 枚の札をとり,  $B$  と同じことをする. こうして先に札のなくなったほうを勝とする.  $A$  が勝つ確率を  $p_n$ ,  $B$  が勝つ確率を  $q_n$  とする. ただし相手の札をとるとき, どの札も等しい確率でとるものとする.

- (1)  $p_1, p_2, q_1, q_2$  を求めよ.
- (2)  $p_n + q_n = 1, (n+2)p_n - np_{n-2} = 1, (n = 3, 4, 5, \dots)$ であることを示せ.
- (3)  $p_n$  を求めよ.

## 第 6 問

曲線  $C: y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ), 3 点  $A = (a, 0)$ ,  $R = (4, 0)$ ,  $Q = (0, 2)$  を考える. ただし  $0 < a < 4$  とする. 点  $A$  から  $C$  に接線  $L_a$  をひき, その  $y$  軸との交点を  $B$ , 原点を  $O$  とする.

- (1) 直線  $RQ$  が接線  $L_a$  と第 1 象限の点  $M = (x_0, y_0)$ ,  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$  で交わるための必要十分条件を求めよ.

設問 (1) の条件がみたされているとき, 4 角形  $OAMQ$  の面積を  $T$ ,  $\triangle ARM$  の面積を  $S_1$ ,  $\triangle BQM$  の面積を  $S_2$  とする.

- (2)  $r = S_1 + S_2$ ,  $m = S_1 S_2$  とおくと, 点  $(r, m)$  の存在する範囲を図示せよ.

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)