

京都大学 1995 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

自然数 n に対して, x^n を $x^2 + ax + b$ で割った余りを $r_n x + s_n$ とする. 次の 2 条件 (イ), (ロ) を考える.

(イ) $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha > \beta > 0$ と表せる.

(ロ) すべての自然数 n に対して $r_n < r_{n+1}$ が成り立つ.

(1) (イ), (ロ) がみたされるとき, すべての自然数 n に対して $\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1)$ が成り立つことを示せ.

(2) 実数 a, b がどのような範囲にあるとき (イ), (ロ) がみたされるか. 必要十分条件を求め, 点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ.

▶ 解法 1

【方針】

2 根へ余り式を代入して r_n を明示し、単調条件を根の不等式へ翻訳する。全 n での成立条件を根の 1 との大小で分類してから係数平面へ戻す。

【解答】

α, β を余り式へ代入すると

$$r_n \alpha + s_n = \alpha^n, \quad r_n \beta + s_n = \beta^n,$$

従って

$$r_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

(1) $r_{n+1} > r_n$ は

$$\alpha^n (\alpha - 1) > \beta^n (\beta - 1)$$

と同値である。 $\beta^n > 0$ で割れば

$$\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1).$$

(2) $\alpha > \beta > 0$ のもとで上の不等式がすべての n で成り立つ条件を調べる。 $\alpha \geq 1$ なら、 $\beta \leq 1$ では左辺が 0 以下・右辺が 0 以上、 $\beta > 1$ では $\alpha/\beta > 1$ かつ $\alpha - 1 > \beta - 1$ なので常に成り立つ。逆に $\alpha < 1$ なら $0 < \beta < \alpha < 1$ であり、条件は

$$(\alpha/\beta)^n (1 - \alpha) < 1 - \beta$$

となるが、左辺は $n \rightarrow \infty$ で発散するので不可能である。従って根での必要十分条件は

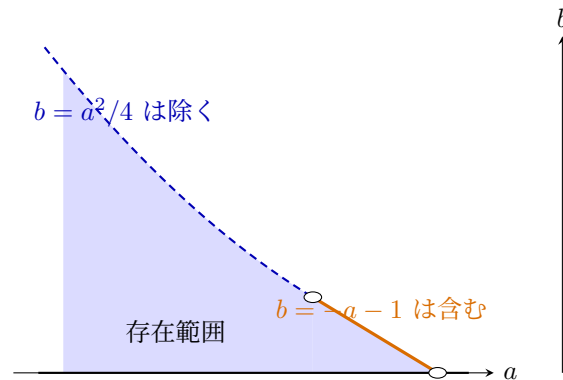
$$\alpha > \beta > 0, \quad \alpha \geq 1.$$

解と係数の関係から $a = -(\alpha + \beta) < 0, b = \alpha\beta > 0$ 、判別式 $a^2 - 4b > 0$ である。大きい根 $(-a + \sqrt{a^2 - 4b})/2 \geq 1$ を整理すると、 $a \leq -2$ では自動的に成り立ち、 $-2 < a < 0$ では $b \leq -a - 1$ となる。正值・判別式も合わせて

$$\begin{cases} a \leq -2, & 0 < b < a^2/4, \\ -2 < a < -1, & 0 < b \leq -a - 1. \end{cases}$$

これが求める範囲である。第 1 領域は放物線 $b = a^2/4$ の下側で放物線を含まず、第 2 領域は直線 $b = -a - 1$ 以下で直線を含む。

【 (a, b) の存在範囲】



▶ 解法 2

【方針】

$r_{n+1} - r_n$ を根 α, β で直接表す。全自然数 n で正となるかを $\alpha < 1$ と $\alpha \geq 1$ に分け、最後に大きい根の公式を係数条件へ直す。

【解答】

(1)

余りを 2 根へ代入すると

$$r_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

したがって

$$r_{n+1} - r_n = \frac{\alpha^n(\alpha - 1) - \beta^n(\beta - 1)}{\alpha - \beta}.$$

$\alpha - \beta > 0$ だから、増加条件は

$$\beta - 1 < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\alpha - 1)$$

と同値であり、(1) を得る。

(2)

$\alpha \geq 1$ なら、 $\beta \leq 1$ の場合は左辺が 0 以下、右辺が 0 以上である。 $\beta > 1$ の場合も

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n > 1, \quad \alpha - 1 > \beta - 1$$

だから常に成立する。

逆に $\alpha < 1$ なら $0 < \beta < \alpha < 1$ であり、条件は

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (1 - \alpha) < 1 - \beta$$

となる。しかし $\alpha/\beta > 1$ なので左辺は n とともに限りなく大きくなり、全 n では成立しない。よって根に関する必要十分条件は

$$\alpha > \beta > 0, \quad \alpha \geq 1.$$

解と係数の関係から

$$a < 0, \quad b > 0, \quad a^2 - 4b > 0.$$

大きい根

$$\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

が 1 以上という条件を加える。 $a \leq -2$ なら自動的に成立する。 $-2 < a < 0$ では両辺を安全に平方でき

$$a^2 - 4b \geq (a + 2)^2$$

すなわち $b \leq -a - 1$ となる。 $b > 0$ も合わせると

$$\begin{cases} a \leq -2, & 0 < b < \frac{a^2}{4}, \\ -2 < a < -1, & 0 < b \leq -a - 1. \end{cases}$$

放物線境界は含まず、直線境界は含む。

【総評】 難度 8、計算量 7。余りの係数を根の冪差として表すことで、無限個の単調条件を $\alpha \geq 1$ の一条件へ集約した。係数平面へ戻す際は $a = -2$ を境に平方可能性が変わるため、境界の包含も分けて確認した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 2 問】

O を中心とする円周上に相異なる 3 点 A_0, B_0, C_0 が時計回りの順に置かれている。自然数 n に対し、点 A_n, B_n, C_n を次の規則で定めていく。

(イ) A_n は弧 $A_{n-1}B_{n-1}$ を 2 等分する点である。(ここで弧 $A_{n-1}B_{n-1}$ は他の点 C_{n-1} を含まないほうを考える。以下においても同様である。)

(ロ) B_n は弧 $B_{n-1}C_{n-1}$ を 2 等分する点である。

(ハ) C_n は弧 $C_{n-1}A_{n-1}$ を 2 等分する点である。

$\angle A_nOB_n$ の大きさを α_n とする。ただし、 $\angle A_nOB_n$ は点 C_n を含まないほうの弧 A_nB_n の中心角を表す。

(1) すべての自然数 n に対して $4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して $\alpha_{n+2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{n-1}$ であることを示せ。

(3) α_{3n} を α_0 で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

3 本の弧の中心角を置き、次段階の弧が隣合う 2 弧の半分ずつからなることを使う。得た漸化式を 3 段ごとの一次漸化式へ変える。

【解答】

弧 A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n の中心角をそれぞれ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ とすると

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2\pi, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}.$$

(1) $\beta_{n-1} = 2\alpha_n - \alpha_{n-1}$ であり、また

$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}}{2} = \frac{2\pi - \alpha_{n-1}}{2}.$$

従って

$$2\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi - \frac{\alpha_{n-1}}{2},$$

すなわち

$$4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi.$$

(2) (1) を一つずらして

$$\alpha_{n+2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_{n+1}}{2} - \frac{\alpha_n}{4}.$$

ここへ $\alpha_{n+1} = \pi/2 + \alpha_n/2 - \alpha_{n-1}/4$ を代入すると

$$\alpha_{n+2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha_{n-1}}{8}.$$

(3) $u_n = \alpha_{3n}$ とおけば (2) より

$$u_{n+1} = \frac{3\pi}{4} - \frac{u_n}{8}.$$

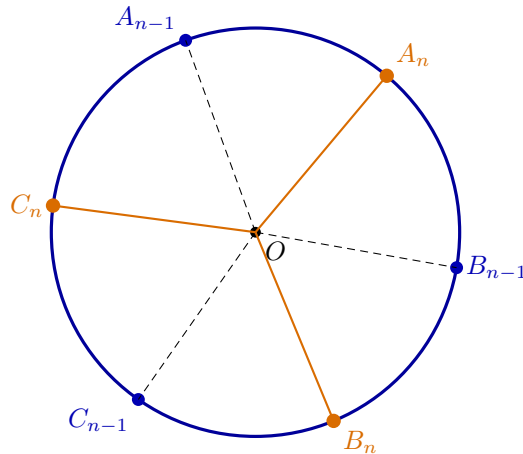
この漸化式の定常値は $2\pi/3$ なので

$$u_n - \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{8} \left(u_{n-1} - \frac{2\pi}{3} \right).$$

従って

$$\alpha_{3n} = \frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{1}{8} \right)^n \left(\alpha_0 - \frac{2\pi}{3} \right).$$

【3つの弧を同時に二等分する更新】



各新点は隣接する旧2点の弧の中点

▶ 解法 2

【方針】

3つの中心角をベクトルにまとめる。更新は一定の平均行列で表せるため、その3乗の第1行から3段ごとの漸化式を直接得る。

【解答】

弧 $A_n B_n, B_n C_n, C_n A_n$ の中心角を $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ とする。常に

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2\pi.$$

中点への移動から

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

(1)

第1式から $\beta_{n-1} = 2\alpha_n - \alpha_{n-1}$ である。また

$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}}{2} = \frac{2\pi - \alpha_{n-1}}{2}.$$

これを $2\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$ へ代入して

$$4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi.$$

(2)

上の整数行列を N とすると、直接計算により N^3 の第1行は

$$(2, 3, 3)$$

である。したがって

$$\alpha_{n+3} = \frac{2\alpha_n + 3\beta_n + 3\gamma_n}{8} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{8}.$$

n を $n-1$ に替えれば

$$\alpha_{n+2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha_{n-1}}{8}.$$

(3)

$u_n = \alpha_{3n}$ とおくと

$$u_{n+1} = \frac{3\pi}{4} - \frac{u_n}{8}.$$

定常値は $2\pi/3$ だから

$$u_{n+1} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{8} \left(u_n - \frac{2\pi}{3} \right).$$

よって

$$\alpha_{3n} = \frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{1}{8} \right)^n \left(\alpha_0 - \frac{2\pi}{3} \right).$$

【総評】 難度 7、計算量 5。点の位置ではなく 3 弧の中心角を状態変数にすると、各更新が隣接 2 成分の平均になる。(2) で中間項を消去し、3 段ごとの定常値 $2\pi/3$ と初期偏差を明示した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 3 問】

a, b, c は実数で $a \geq 0, b \geq 0$ とする。

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad q(x) = cx^2 + bx + a$$

とおく。 $-1 \leq x \leq 1$ をみたすすべての x に対して $|p(x)| \leq 1$ が成り立つとき、 $-1 \leq x \leq 1$ をみたすすべての x に対して $|q(x)| \leq 2$ が成り立つことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

$q(x)$ を $p(1), p(-1), p(0)$ の線形結合として補間表示する。前二項が凸結合、残りの係数の絶対値が 1 以下であることから評価する。

【解答】

仮定から

$$|p(1)| \leq 1, \quad |p(-1)| \leq 1, \quad |p(0)| \leq 1.$$

ここで

$$p(1) = a + b + c, \quad p(-1) = a - b + c, \quad p(0) = c.$$

係数を消去すると

$$q(x) = \frac{1+x}{2}p(1) + \frac{1-x}{2}p(-1) - (1-x^2)p(0)$$

である。

$-1 \leq x \leq 1$ では

$$\frac{1+x}{2} \geq 0, \quad \frac{1-x}{2} \geq 0$$

で、2 係数の和は 1 である。したがって最初の 2 項は $p(1), p(-1)$ の凸結合であり、その絶対値は 1 以下である。また

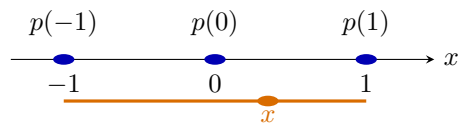
$$|(1-x^2)p(0)| \leq 1 - x^2 \leq 1.$$

三角不等式より

$$|q(x)| \leq 1 + 1 = 2.$$

よって主張が成り立つ。

【3 点の値による二次式の復元】



$q(x)$ を端点 2 値の凸結合と中央値の補正に分ける

▶ 解法 2

【方針】

$p(-1), p(0), p(1)$ から係数 a, b, c を復元し、そのまま $q(x)$ へ代入する。得られる式を 3 つの既知値の重み付き和として評価する。

【解答】

$$p(1) = a + b + c, \quad p(-1) = a - b + c, \quad p(0) = c.$$

したがって

$$b = \frac{p(1) - p(-1)}{2},$$

$$a = \frac{p(1) + p(-1)}{2} - p(0), \quad c = p(0).$$

これを $q(x) = cx^2 + bx + a$ へ代入すると

$$q(x) = \frac{1+x}{2}p(1) + \frac{1-x}{2}p(-1) - (1-x^2)p(0).$$

$|x| \leq 1$ では最初の 2 係数は非負で和が 1 だから

$$\left| \frac{1+x}{2}p(1) + \frac{1-x}{2}p(-1) \right| \leq 1.$$

また

$$|(1-x^2)p(0)| \leq 1.$$

よって

$$|q(x)| \leq 2.$$

【総評】 難度 6、計算量 4。 c の符号が自由なので係数和だけでは評価できない。二次式が 3 点の値で決まることを利用した補間恒等式により、仮定 $|p| \leq 1$ を必要な 3 点だけで厳密に使った。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 4 問】

- (1) 平面ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ から 2 行 2 列の行列 $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ をつくる. $\vec{x}$, $\vec{y}$ のどの一方も他方の実数倍ではないとき, P は逆行列をもつことを示せ.
- (2) $B = \begin{pmatrix} p & b \\ c & -p \end{pmatrix}$ は単位行列の実数倍ではないとする. このとき, 設問 (1) のようにして作った P が逆行列 P^{-1} をもち

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & p^2 + bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つようなベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ があることを示せ.

- (3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は単位行列の実数倍ではなく, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ も単位行列の実数倍ではないとする. A , A' が

$$a + d = a' + d', \quad ad - bc = a'd' - b'c'$$

をみたせば, $P^{-1}AP = A'$ となる P があることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) を列ベクトルの一次独立性で示す. (2) は $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ と選び, $B^2 = (p^2 + bc)E$ を使う. (3) は跡の半分を引いて (2) へ帰着する.

【解答】

(1) $P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ なら $u\mathbf{x} + v\mathbf{y} = \mathbf{0}$ である. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は一次独立なので $u = v = 0$. 従って P の核は零ベクトルだけであり, P は逆行列をもつ. (2) B が任意の $\mathbf{x}$ をその実数倍へ移すなら B はスカラー行列になる. 従って $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ が一次独立となる $\mathbf{x}$ を選べる. (1) より, この 2 本を列にもつ P は可逆である. また

$$B^2 = (p^2 + bc)E.$$

よって $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $B\mathbf{y} = (p^2 + bc)\mathbf{x}$ であり, 基底 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に関する表現行列は

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & p^2 + bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) 共通の跡を t とし

$$B = A - \frac{t}{2}E, \quad B' = A' - \frac{t}{2}E$$

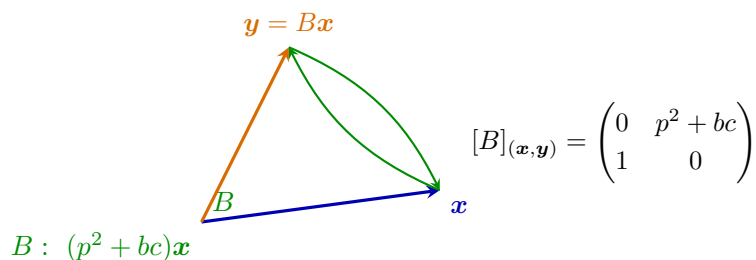
とおく. 両者は跡 0 で, スカラー行列ではない. 2 次行列の固有方程式から

$$B^2 = \left(\frac{t^2}{4} - \det A \right) E, \quad B'^2 = \left(\frac{t^2}{4} - \det A' \right) E.$$

行列式が等しいので右辺の係数は共通である. (2) により可逆行列 P_1, P_2 を選び, $P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}B'P_2$ とできる. 従って $P = P_1P_2^{-1}$ とおけば

$$P^{-1}AP = A'.$$

【基底 (x, Bx) での作用】



► 解法 2

【方針】

(2) では x を成分ごとに具体的に選び、 x, Bx が一次独立となることを確認する。この基底での作用を列ごとに読み、(3) は跡の半分を引いた共通標準形へ帰着する。

【解答】

(1)

$P(u, v)^T = \mathbf{0}$ なら $ux + vy = \mathbf{0}$ である。2 ベクトルは一次独立だから $u = v = 0$ 。よって P は可逆である。

(2)

$c \neq 0$ なら $x = (1, 0)^T$ 、 $c = 0, b \neq 0$ なら $x = (0, 1)^T$ を選ぶ。 $b = c = 0$ なら非スカラー性より $p \neq 0$ なので $x = (1, 1)^T$ を選ぶ。いずれも x と

$$y = Bx$$

は一次独立である。

また直接計算で

$$B^2 = (p^2 + bc)I.$$

したがって

$$Bx = y, \quad By = (p^2 + bc)x.$$

$P = (x \ y)$ とすれば、列ごとの座標から

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & p^2 + bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)

共通の跡を t とし

$$B = A - \frac{t}{2}I, \quad B' = A' - \frac{t}{2}I$$

とおく。両者は跡 0 の非スカラー行列であり

$$B^2 = \left(\frac{t^2}{4} - \det A \right) I, \quad B'^2 = \left(\frac{t^2}{4} - \det A' \right) I.$$

行列式も等しいから、(2) により同じ標準形 J へ移せる。

$$P_1^{-1}BP_1 = J = P_2^{-1}B'P_2.$$

$P = P_1P_2^{-1}$ とおけば

$$P^{-1}AP = A'.$$

【総評】 難度 9、計算量 7。非スカラー性を『あるベクトルとその像が一次独立』という基底構成へ変換するのが核心である。(3) では跡の半分を除いた行列の二乗係数が行列式だけで決まることを使い、共通標準形を介して相似を構成した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 5 問】

A と B の 2 人が次のようなゲームを行う. n を自然数とし, A はそれぞれ $0, 1, 2, \dots, n$ と書かれた $(n+1)$ 枚の札をもっている. B はそれぞれ $1, 2, \dots, n$ と書かれた n 枚の札をもっているとする. 第 1 回目に B が A の持札から 1 枚の札をとり, もし番号が一致する札があればその 2 枚の札をその場に捨てる. 番号が一致しない札はそのまま持ち続ける. 次に B に持札があれば A が B の持札から 1 枚の札をとり, B と同じことをする. こうして先に札のなくなったほうを勝とする. A が勝つ確率を p_n , B が勝つ確率を q_n とする. ただし相手の札をとるとき, どの札も等しい確率でとるものとする.

- (1) p_1, p_2, q_1, q_2 を求めよ.
- (2) $p_n + q_n = 1, (n+2)p_n - np_{n-2} = 1, (n=3, 4, 5, \dots)$ であることを示せ.
- (3) p_n を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

0 の札が相手へ移る枝は役割交換、正番号を引く枝は最初の 2 手で同番号 2 組を除いた $n-2$ のゲームになることを利用し、2 段漸化式を解く。

【解答】

(1) 最初に B が 0 を引く確率は $1/(n+1)$ である. この枝では 0 を持つ側と次の手番が入れ替わるため、以後 A が勝つ確率は $q_n = 1 - p_n$ である.

正番号を引く確率は $n/(n+1)$ である. B が同番号の 2 枚を捨て、続く A の手でも必ず別の同番号 2 枚を捨てるので、残りは添字が 2 小さい同じゲームになる. $n=1, 2$ ではこの枝で B の札がなくなり A は勝たない. したがって

$$p_1 = \frac{1}{2}(1 - p_1), \quad p_2 = \frac{1}{3}(1 - p_2).$$

よって

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad q_1 = \frac{2}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{4}, \quad q_2 = \frac{3}{4}.$$

(2)

ゲームは確率 1 でどちらかの勝ちに終わるので

$$p_n + q_n = 1.$$

$n \geq 3$ では上の 2 つの枝から

$$p_n = \frac{1 - p_n}{n+1} + \frac{n}{n+1}p_{n-2}.$$

整理して

$$(n+2)p_n - np_{n-2} = 1.$$

(3)

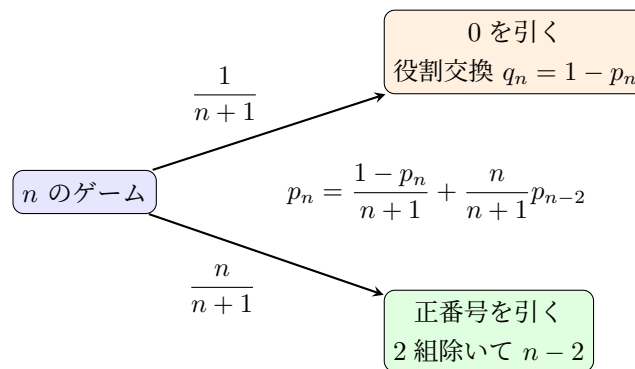
偶数と奇数に分けて帰納すると

$$p_{2m} = \frac{m}{2m+2} \quad (m \geq 1),$$

$$p_{2m+1} = \frac{m+1}{2m+3} \quad (m \geq 0).$$

初期値 p_1, p_2 に一致し、漸化式へ代入すれば同じ偶奇の次項が得られるので、すべての自然数 n で成立する。

【最初の札による 2 つの縮約】



▶ 解法 2

【方針】

2 段漸化式を偶数列と奇数列へ分ける。左辺の係数を吸収した新しい数列を置くと、どちらも「前項に 1 を足す」漸化式になる。

【解答】

(1)

$n = 1, 2$ のゲームを直接追うと

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{4}, \quad q_1 = \frac{2}{3}, \quad q_2 = \frac{3}{4}.$$

(2)

最初に 0 を引く枝では役割が交換し、正番号を引く枝では 2 組を除いて $n - 2$ のゲームになる。したがって

$$p_n = \frac{1 - p_n}{n + 1} + \frac{n}{n + 1} p_{n-2}.$$

また $p_n + q_n = 1$ であり、 $n \geq 3$ では

$$(n + 2)p_n - np_{n-2} = 1.$$

(3)

偶数項について

$$U_m = (2m + 2)p_{2m}$$

とおく。漸化式から

$$U_m = 1 + 2m p_{2m-2} = 1 + U_{m-1}.$$

$U_1 = 4p_2 = 1$ だから $U_m = m$ 。よって

$$p_{2m} = \frac{m}{2m + 2}.$$

奇数項について

$$V_m = (2m + 3)p_{2m+1}$$

とおくと

$$V_m = 1 + (2m + 1)p_{2m-1} = 1 + V_{m-1}.$$

$V_0 = 3p_1 = 1$ だから $V_m = m + 1$ 。したがって

$$p_{2m+1} = \frac{m + 1}{2m + 3}.$$

【総評】 難度 9、計算量 7。札の移動により同じ状態へ戻る可能性があるため、単純な有限手数の木ではなく自己参照確率として扱う。0 を引く枝の役割交換と正番号枝の $n - 2$ への縮約を明示し、偶奇別一般項を再代入で検証した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。

【第 6 問】

曲線 $C: y = \frac{1}{x} (x > 0)$, 3 点 $A = (a, 0)$, $R = (4, 0)$, $Q = (0, 2)$ を考える. ただし $0 < a < 4$ とする. 点 A から C に接線 L_a をひき, その y 軸との交点を B , 原点を O とする.

(1) 直線 RQ が接線 L_a と第 1 象限の点 $M = (x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ で交わるための必要十分条件を求めよ.

設問 (1) の条件がみたされているとき, 4 角形 $OAMQ$ の面積を T , $\triangle ARM$ の面積を S_1 , $\triangle BQM$ の面積を S_2 とする.

(2) $r = S_1 + S_2$, $m = S_1 S_2$ とおくと, 点 (r, m) の存在する範囲を図示せよ.

▶ 解法 1

【方針】

双曲線の接点を置いて L_a を求め, RQ との交点座標の符号を調べる. 二面積を比の変数で簡単化すると, 和と積の関係が消去できる.

【解答】

C 上の接点を $(t, 1/t)$ とすると接線は $y = -x/t^2 + 2/t$ で, x 切片が $2t$ である. A を通るので $t = a/2$, 従って

$$L_a: y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a}, \quad B = \left(0, \frac{4}{a}\right).$$

また $RQ: y = 2 - x/2$ である. (1) 2 直線の交点は

$$x_0 = \frac{4a(a-2)}{a^2-8}, \quad y_0 = \frac{4(a-4)}{a^2-8}.$$

$0 < a < 4$ のもとで $x_0 > 0, y_0 > 0$ を同時に満たすのは

$$0 < a < 2.$$

(2) この範囲で

$$S_1 = \frac{(4-a)y_0}{2} = \frac{2(4-a)^2}{8-a^2}, \quad S_2 = \frac{(4/a-2)x_0}{2} = \frac{4(2-a)^2}{8-a^2}.$$

$u = (4-a)/(2-a)$ とおくと $u > 2$ であり

$$S_1 = \frac{2u^2}{u^2-2}, \quad S_2 = \frac{4}{u^2-2}.$$

従って $S_1 = S_2 + 2$ である. $s = S_2$ とおけば, $u: 2 \rightarrow \infty$ に伴い $s: 2 \rightarrow 0$ なので $0 < s < 2$ である. よって

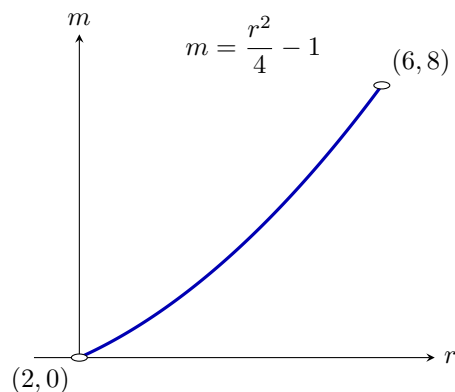
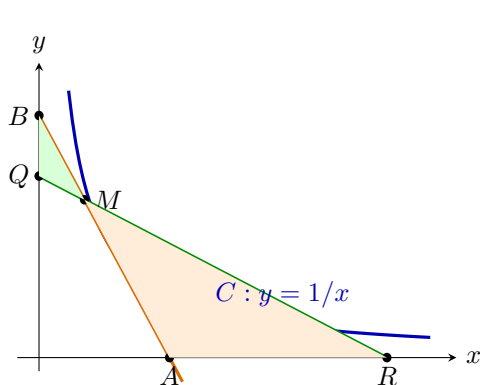
$$r = 2 + 2s, \quad m = s(s+2).$$

s を消去すると

$$m = \frac{r^2-4}{4}, \quad 2 < r < 6.$$

従って存在範囲は放物線 $m = r^2/4 - 1$ 上の, 端点 $(2, 0), (6, 8)$ を除く弧である.

【接線配置と (r, m) の軌跡】



▶ 解法 2

【方針】

交点座標から 2 面積を直接求める。補助変数を導入せず $S_1 - S_2 = 2$ を代数的に示し、 S_2 の連続な値域から (r, m) の軌跡を得る。

【解答】

(1)

C 上の接点を $(t, 1/t)$ とすると、接線の x 切片は $2t$ である。これが $A = (a, 0)$ を通るので $t = a/2$ となり

$$L_a : y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a}.$$

$RQ : y = 2 - x/2$ との交点は

$$x_0 = \frac{4a(a-2)}{a^2-8}, \quad y_0 = \frac{4(a-4)}{a^2-8}.$$

$0 < a < 4$ で両方が正となる必要十分条件は

$$0 < a < 2.$$

(2)

この範囲で

$$S_1 = \frac{2(4-a)^2}{8-a^2}, \quad S_2 = \frac{4(2-a)^2}{8-a^2}.$$

分子を直接引けば

$$S_1 - S_2 = 2.$$

また S_2 は $0 < a < 2$ で連続であり

$$\lim_{a \rightarrow 0+} S_2 = 2, \quad \lim_{a \rightarrow 2-} S_2 = 0.$$

よって $s = S_2$ とおけば $0 < s < 2$ 、 $S_1 = s + 2$ である。したがって

$$r = 2s + 2, \quad m = s(s + 2).$$

$s = (r - 2)/2$ を消去して

$$m = \frac{r^2 - 4}{4}, \quad 2 < r < 6.$$

すなわち放物線上の、端点 $(2, 0), (6, 8)$ を除く弧である。

【総評】 難度 8、計算量 8。接線の接点と x 切片の関係からパラメータを一意に決めた。第 1 象限条件の符号を分母 $a^2 - 8$ も含めて調べ、面積比の変数 u により $S_1 = S_2 + 2$ という単純な関係へ整理した。2 解法の結論を照合し、条件の必要十分性、端点、符号、定義域、等号成立条件を再確認した。図は論証を補助するものに限定し、縮尺に依存しない式による説明も併記している。