

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1996 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n は自然数とする.

(1) すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos \theta), \quad \sin n\theta = g_n(\cos \theta) \sin \theta$$

をみたし, 係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ.

(2) $f_n'(x) = ng_n(x)$ であることを示せ.

(3) p を 3 以上の素数とすると, $f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ.

第 2 問

m, n は自然数で, $m < n$ をみたすものとする. $m^n + 1, n^m + 1$ がともに 10 の倍数となる m, n を 1 組与えよ.

第 3 問

平面上に 60 度で交わる 2 直線 l, m がある. この平面上に点 P_1 をとり, P_1 と直線 l について対称な点を Q_1 , Q_1 と直線 m について対称な点を P_2 と定め, 以下同様に点 $Q_2, P_3, \dots$ を定める.

- (1) $P_4 = P_1$ となることを示せ.
- (2) 点 P_1 が 2 直線 l, m の交点を中心とし半径 1 の円周上を動くとき, 点 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4$ をこの順に結ぶ折れ線の長さの最大値を求めよ.

第 4 問

x, y は $x + y > 0, x - y > 0$ をみたす実数とする. ある 4 面体の隣り合う 2 辺の長さが $\sqrt{x + y}, \sqrt{x - y}$ で, 残り 4 辺の長さはすべて 1 であるという. このような条件をみたす点 (x, y) の存在範囲を図示せよ.

第 5 問

a は与えられた実数で、 $0 < a \leq 1$ をみたすものとする． xyz 空間内に 1 辺の長さ $2a$ の正三角形 $\triangle PQR$ を考える．辺 PQ は xy 平面上にあり， $\triangle PQR$ を含む平面は xy 平面と垂直で，さらに点 R の z 座標は正であるとする．

- (1) 辺 PQ が xy 平面の単位円の内部 (周を含む) を自由に動くとき， $\triangle PQR$ (内部を含む) が動いてできる立体の体積 V を求めよ．
- (2) a が $0 < a \leq 1$ の範囲を動くとき，体積 V の最大値を求めよ．

第 6 問

n を 3 以上の整数とする. 円周上の n 等分点のある点を出発点とし, n 等分点を一定の方向に次のように進む. 各点でコインを投げ, 表が出れば次の点に進み, 裏が出れば次の点を跳び越しその次の点に進む.

- (1) 最初に 1 周まわったとき, 出発点を跳び越す確率 p_n を求めよ.
- (2) k は 2 以上の整数とする. $k - 1$ 周目までは出発点を跳び越し, k 周目に初めて出発点を踏む確率を $q_{n,k}$ とする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n,k}$$

を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)