

京都大学 1996 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n は自然数とする.

(1) すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos \theta), \quad \sin n\theta = g_n(\cos \theta) \sin \theta$$

をみたし、係数がともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ.

(2) $f'_n(x) = ng_n(x)$ であることを示せ.

(3) p を 3 以上の素数とすると、 $f_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

加法定理から f_n, g_n の整数係数漸化式を作り、次数も帰納する。(2) は合成関数の微分、(3) は導関数の係数比較と $f_p(0)$ を使う。

【解答】

(1) $f_1(x) = x, g_1(x) = 1$ とする。加法定理から、 $x = \cos \theta$ として

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= xf_n(x) - (1-x^2)g_n(x), \\ g_{n+1}(x) &= f_n(x) + xg_n(x) \end{aligned}$$

と定めれば、 $\cos(n+1)\theta = f_{n+1}(\cos \theta)$ 、 $\sin(n+1)\theta = g_{n+1}(\cos \theta) \sin \theta$ となる。右辺は整数係数で、最高次項を調べると f_{n+1} は $n+1$ 次、 g_{n+1} は n 次である。従って数学的帰納法により存在する。(2) $-1 < x < 1$ で $x = \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とおく。 $f_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ を θ で微分すると

$$-f'_n(\cos \theta) \sin \theta = -n \sin n\theta = -ng_n(\cos \theta) \sin \theta.$$

$\sin \theta > 0$ なので $f'_n(x) = ng_n(x)$ が $-1 < x < 1$ で成り立つ。両辺は多項式だから、恒等的に成り立つ。(3) $f_p(x) = \sum_{j=0}^p c_j x^j$ とする。(2) より

$$\sum_{j=1}^p j c_j x^{j-1} = p g_p(x).$$

従って $1 \leq j \leq p-1$ では p が $j c_j$ を割る。 p は素数で j を割らないため、 p は c_j を割る。また p は奇数なので

$$c_0 = f_p(0) = \cos \frac{p\pi}{2} = 0.$$

よって $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる。

▶ 解法 2

【方針】

ド・モアブルの定理を二項展開し、偶数次項と奇数次項を分けることで f_n, g_n を明示的に構成する。(2) は三角関数を微分し、(3) は導関数の係数比較と奇数 p の定数項を用いる。

【解答】

(1)

ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

を展開する。 $x = \cos \theta$, $\sin^2 \theta = 1 - x^2$ とすると

$$f_n(x) = \sum_{2r \leq n} (-1)^r {}_nC_{2r} x^{n-2r} (1-x^2)^r,$$

$$g_n(x) = \sum_{2r+1 \leq n} (-1)^r {}_nC_{2r+1} x^{n-2r-1} (1-x^2)^r.$$

いずれも整数係数である。最高次係数はそれぞれ

$$\sum_{2r \leq n} {}_nC_{2r} = 2^{n-1}, \quad \sum_{2r+1 \leq n} {}_nC_{2r+1} = 2^{n-1}$$

だから、次数はそれぞれ $n, n-1$ である。

(2)

$$f_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

を微分すると

$$-f'_n(\cos \theta) \sin \theta = -n \sin n\theta = -ng_n(\cos \theta) \sin \theta.$$

$0 < \theta < \pi$ で $\sin \theta \neq 0$ だから $f'_n(x) = ng_n(x)$ は $-1 < x < 1$ で成り立つ。両辺は多項式なので恒等式である。

(3)

$$f_p(x) = \sum_{j=0}^p c_j x^j$$

とおく。(2) より

$$\sum_{j=1}^p j c_j x^{j-1} = p g_p(x).$$

$1 \leq j \leq p-1$ では $p \nmid j$ なので $p \mid c_j$ である。また p は奇数だから

$$c_0 = f_p(0) = \cos \frac{p\pi}{2} = 0.$$

よって $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる。

【総評】 難度 8、計算量 6。存在・微分恒等式・係数の整除性が一続きになっている。微分で得た関係を开区間から多項式恒等式へ延長し、定数項を別に処理した。係数 j が素数 p と互いに素である範囲を明示し、最高次係数を主張対象から除外している。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 2 問】

m, n は自然数で、 $m < n$ をみたすものとする。 $m^n + 1, n^m + 1$ がともに 10 の倍数となる m, n を 1 組与えよ。

▶ 解法 1

【方針】

10 を法として -1 になる数を選ぶ。9 の奇数乗が再び 9 になることを使って大小条件も満たす組を作る。

【解答】

$m = 9, n = 19$ とする。 $m < n$ であり、9 の奇数乗は 10 を法として 9 に合同だから

$$9^{19} \equiv 9 \pmod{10}.$$

また $19 \equiv 9 \pmod{10}$ なので

$$19^9 \equiv 9^9 \equiv 9 \pmod{10}.$$

従って $m^n + 1, n^m + 1$ はいずれも 10 で割り切れる。よって一例は

$$(m, n) = (9, 19).$$

▶ 解法 2

【方針】

10 を法として -1 に合同な奇数を選べば、その奇数乗も -1 に合同になる。これにより条件を満たす無限族を作り、そこから大小条件を満たす 1 組を取る。

【解答】

0 以上の整数 $r < s$ に対し

$$m = 10r + 9, \quad n = 10s + 9$$

とおく。 m, n はともに奇数で

$$m \equiv n \equiv -1 \pmod{10}.$$

したがって

$$m^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \pmod{10},$$

$$n^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod{10}.$$

よって $m^n + 1, n^m + 1$ はともに 10 の倍数である。例えば $r = 0, s = 1$ に相当する

$$(m, n) = (9, 19)$$

が求める 1 組である。

【総評】 難度 3、計算量 2。一般解ではなく一例を求める問題なので、9 の奇数乗の剰余周期を使うと直ちに構成できる。両方の式を個別に確認した。 $m < n$ 、自然数、指数がともに奇数という全条件を同時に満たす最小限の構成になっている。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 3 問】

平面上に 60° で交わる 2 直線 l, m がある. この平面上に点 P_1 をとり, P_1 と直線 l について対称な点を Q_1 , Q_1 と直線 m について対称な点を P_2 と定め, 以下同様に点 $Q_2, P_3, \dots$ を定める.

- (1) $P_4 = P_1$ となることを示せ.
- (2) 点 P_1 が 2 直線 l, m の交点を中心とし半径 1 の円周上を動くとき, 点 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4$ をこの順に結ぶ折れ線の長さの最大値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

二反転を 120° 回転と捉え、各反転で生じる線分を直線までの距離の 2 倍として正弦和へ直す。

【解答】

(1) 2 直線の交点を O とする. l に関する反転に続く m に関する反転は、 O を中心とする 120° 回転である. 従って P_2, P_3, P_4 は P_1 をそれぞれ $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ 回転した点であり、 $P_4 = P_1$ である。(2) l の方向角を 0 、 P_1 の偏角を ϕ とする。反転で結ばれる 2 点間の距離は反転軸までの距離の 2 倍なので、全長は

$$L = 2 \sum_{j=0}^5 |\sin(\phi + 60^\circ j)| = 4 \sum_{j=0}^2 |\sin(\phi + 60^\circ j)|.$$

周期性から $0 \leq \phi \leq 60^\circ$ を調べればよく、この区間では 3 項は非負で、和は

$$\sin \phi + \sin(\phi + 60^\circ) + \sin(\phi + 120^\circ) = 2 \sin(\phi + 60^\circ) \leq 2.$$

等号は $\phi = 30^\circ$ で成り立つから、最大値は

8.

▶ 解法 2

【方針】

2 直線を座標軸に合わせ、鏡映行列の積が 120° 回転であることを直接計算する。折れ線の 6 辺は各鏡映軸までの距離の 2 倍として表し、正弦和を最大化する。

【解答】

2 直線の交点を O とし、 l の方向角を 0 、 m の方向角を 60° とする。それぞれの鏡映行列の積は

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

これは O を中心とする 120° 回転である。

(1)

3 回合成すれば 360° 回転なので $P_4 = P_1$ である。

(2)

P_1 の偏角を ϕ とする。鏡映前後の点の距離は、鏡映軸までの距離の 2 倍であるから

$$L = 2 \sum_{j=0}^5 |\sin(\phi + 60^\circ j)|.$$

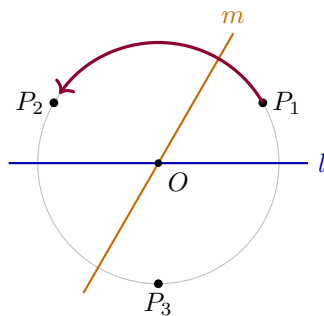
$0 \leq \phi \leq 60^\circ$ としてよく、この範囲で

$$L = 4\{\sin \phi + \sin(\phi + 60^\circ) + \sin(\phi + 120^\circ)\} = 8 \sin(\phi + 60^\circ).$$

よって最大値は $\phi = 30^\circ$ のときの

8

である。



【総評】 難度 6、計算量 5。反転の合成と単位円上の距離表示を結びつけ、6 項の絶対値和を 3 項へ半減した。等号が実現する向きも確認した。各線分を反転軸への垂線距離の 2 倍として数え、6 本を漏れなく含めている。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 4 問】

x, y は $x + y > 0, x - y > 0$ をみたす実数とする。ある 4 面体の隣り合う 2 辺の長さが $\sqrt{x + y}, \sqrt{x - y}$ で、残り 4 辺の長さはすべて 1 であるという。このような条件をみたす点 (x, y) の存在範囲を図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

共通頂点から出る 3 辺をベクトルとし、6 辺長から内積を決める。3 ベクトルが空間内で一次独立になる条件をグラム行列の行列式で表す。

【解答】

特別な 2 辺の共通頂点を O 、その端点を A, B 、第 4 頂点を C とする。 $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{v} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

$$|\mathbf{u}|^2 = x + y, \quad |\mathbf{v}|^2 = x - y, \quad |\mathbf{w}|^2 = 1.$$

残りの辺長が 1 であることから

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x - \frac{1}{2}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \frac{x + y}{2}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{x - y}{2}.$$

この 3 ベクトルのグラム行列の行列式は、展開して

$$\det G = \frac{3(x^2 - y^2)}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{(x - 2)^2 + 3y^2 - 3}{4}.$$

四面体が正の体積をもつ必要十分条件は G が正定値であることである。問題の条件 $x + y > 0, x - y > 0$ のもとでは、 $\det G > 0$ なら 2 次の主小行列式も正になる。実際

$$x - \frac{1}{4} - y^2 > 0$$

は $(x - 2)^2 + 3y^2 < 3$ から従う。従って存在範囲は

$$x > |y|, \quad (x - 2)^2 + 3y^2 < 3.$$

すなわち直線 $y = \pm x$ の間にあり、楕円 $(x - 2)^2 + 3y^2 = 3$ の内部にある部分で、境界はいずれも含まない。

▶ 解法 2

【方針】

特別な 2 辺と、その間の長さ 1 の辺が作る三角形を先に考える。第 4 頂点はその三角形の 3 頂点から距離 1 にあるので、外接円半径が 1 未満であることが必要十分である。面積と外接円半径を辺長から計算する。

【解答】

特別な 2 辺の共通頂点を O 、端点を A, B とする。

$$OA = \sqrt{x+y}, \quad OB = \sqrt{x-y}, \quad AB = 1.$$

$\triangle OAB$ の面積を Δ とする。余弦定理に対応する内積から

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x - \frac{1}{2}$$

なので

$$4\Delta^2 = (x+y)(x-y) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x - \frac{1}{4} - y^2.$$

第 4 頂点 C は O, A, B のすべてから距離 1 にある。これは C の $\triangle OAB$ 平面への射影が外心であり、外接円半径 R が $R < 1$ であることと同値である。等号では 4 点が同一平面上となり四面体にならない。

外接円半径の公式より

$$R^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot AB^2}{16\Delta^2} = \frac{x^2 - y^2}{4\left(x - \frac{1}{4} - y^2\right)}.$$

$R < 1$ を整理すると

$$(x-2)^2 + 3y^2 < 3.$$

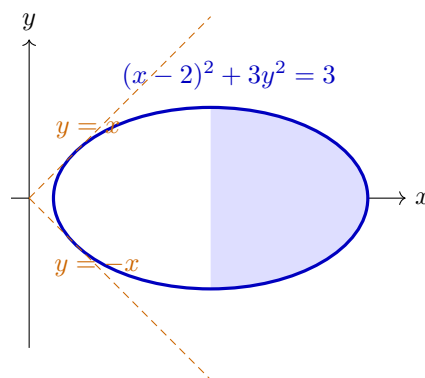
また問題の辺長条件は

$$x+y > 0, \quad x-y > 0 \iff x > |y|.$$

したがって存在範囲は

$$x > |y|, \quad (x-2)^2 + 3y^2 < 3$$

であり、境界は含まない。



【総評】 難度 8、計算量 7。全 6 辺をグラム行列へ変換すると存在条件が正定値性に一致する。行列式だけでなく、問題の符号条件下で他の主小行列式も正になることを補った。楕円境界では体積が 0 となるため除外し、直線境界も辺長 0 となるため除外した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 5 問】

a は与えられた実数で、 $0 < a \leq 1$ をみたすものとする。 xyz 空間内に 1 辺の長さ $2a$ の正三角形 $\triangle PQR$ を考える。 辺 PQ は xy 平面上にあり、 $\triangle PQR$ を含む平面は xy 平面と垂直で、 さらに点 R の z 座標は正であるとする。

- (1) 辺 PQ が xy 平面の単位円の内部 (周を含む) を自由に動くとき、 $\triangle PQR$ (内部を含む) が動いてできる立体の体積 V を求めよ。
- (2) a が $0 < a \leq 1$ の範囲を動くとき、 体積 V の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

高さ z で三角形を切ると、 PQ と平行な半長 b の線分になる。 その線分が動いて覆う水平断面の半径を求めて積分する。

【解答】

正三角形の高さは $\sqrt{3}a$ である。 高さ z での切り口は PQ と平行で、 その半長は

$$b = a - \frac{z}{\sqrt{3}} \quad (0 \leq z \leq \sqrt{3}a)$$

である。 PQ の方向を単位ベクトル e 、 中点を M とする。 端点条件 $|M \pm ae| \leq 1$ のもとで、 切り口上の点 $M + te$ ($|t| \leq b$) が原点から取り得る最大距離を求める。 $M = se + qe_{\perp}$ とすれば $(|s| + a)^2 + q^2 \leq 1$ であり、 距離の最大値の二乗は

$$(s + b)^2 + 1 - (s + a)^2 = 1 - a^2 + b^2 + 2s(b - a).$$

$0 \leq b \leq a$ なので最大は $s = 0$ であり、 回転対称性から水平断面は半径 $\sqrt{1 - a^2 + b^2}$ の円板である。 (1) 従って

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}a} \left\{ 1 - a^2 + \left(a - \frac{z}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} dz \\ &= \pi \sqrt{3} \int_0^a (1 - a^2 + b^2) db = \pi \sqrt{3} \left(a - \frac{2a^3}{3} \right). \end{aligned}$$

(2) $0 < a \leq 1$ で $V'(a) = \pi\sqrt{3}(1 - 2a^2)$ だから、 $a = 1/\sqrt{2}$ で最大となる。 最大値は

$$V_{\max} = \frac{\pi\sqrt{6}}{3}.$$

▶ 解法 2

【方針】

高さ z の水平断面を考える。 正三角形内のその高さの線分は PQ と平行で半長 $b = a - z/\sqrt{3}$ である。 PQ の中点を方向成分と垂直成分に分け、 端点が単位円内にある条件下で断面が取り得る半径を最大化する。

【解答】

正三角形の高さは $\sqrt{3}a$ である。 高さ z における三角形の水平線分の半長を b とすると、 相似より

$$b = a - \frac{z}{\sqrt{3}}, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{3}a.$$

PQ の方向の単位ベクトルを e 、 中点を

$$M = se + qe_{\perp}$$

とする。 両端が単位円内にある条件は

$$(|s| + a)^2 + q^2 \leq 1.$$

高さ z の線分上の点 $M + ue$ は $|u| \leq b$ を満たす。 対称性から $s \geq 0$ として外端 $u = b$ の距離を調べると

$$|M + be|^2 \leq (s + b)^2 + 1 - (s + a)^2 = 1 - a^2 + b^2 + 2s(b - a).$$

$b \leq a$ なので最大は $s = 0$ のときである。 回転対称性と連続性から水平断面は半径

$$\sqrt{1 - a^2 + b^2}$$

の円板になる。

(1)

$dz = -\sqrt{3} db$ を用いて

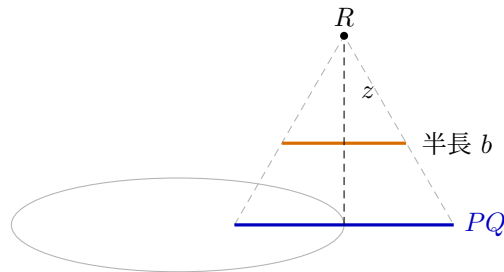
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}a} \left\{ 1 - a^2 + \left(a - \frac{z}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} dz \\ &= \pi \sqrt{3} \int_0^a (1 - a^2 + b^2) db \\ &= \pi \sqrt{3} \left(a - \frac{2a^3}{3} \right). \end{aligned}$$

(2)

$$V'(a) = \pi \sqrt{3} (1 - 2a^2).$$

$0 < a \leq 1$ で最大となるのは $a = 1/\sqrt{2}$ であり、

$$V_{\max} = \frac{\pi \sqrt{6}}{3}.$$



【総評】 難度 9、計算量 7。水平断面は単純な半径の和ではないため、動く線分の中点と方向を分けて最大半径を厳密に求めた。端点 $a = 1$ も含めて最大点を確認した。断面が回転対称な円板を隙間なく覆うことと、半長 b の範囲 $0 \leq b \leq a$ を用いた。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。

【第 6 問】

n を 3 以上の整数とする。円周上の n 等分点のある点を出発点とし、 n 等分点を一定の方向に次のように進む。各点でコインを投げ、表が出れば次の点に進み、裏が出れば次の点を跳び越しその次の点に進む。

(1) 最初に 1 周まわったとき、出発点を跳び越す確率 p_n を求めよ。

(2) k は 2 以上の整数とする。 $k-1$ 周目までは出発点を跳び越し、 k 周目に初めて出発点を踏む確率を $q_{n,k}$ とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n,k}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

距離 j をちょうど踏む確率 h_j を解く。各周の跳び越し後は出発点の 1 点先にいるため、以後は距離 $n-1$ に対する同一の試行が繰り返される。

【解答】

距離 j をちょうど踏む確率を h_j とすると

$$h_0 = 1, \quad h_1 = \frac{1}{2}, \quad h_j = \frac{h_{j-1} + h_{j-2}}{2}.$$

従って

$$h_j = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^j.$$

(1) 距離 $n-1$ を踏んでから 2 歩進む場合に限り出発点を跳び越すので

$$p_n = \frac{h_{n-1}}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

(2) 1 周目を跳び越す確率は p_n である。跳び越した直後は目標点の 1 点先にいるので、次の出発点までの距離は $n-1$ である。この距離を跳び越す確率は $p_{n-1} = h_{n-2}/2$ 、ちょうど踏む確率は h_{n-1} である。独立性より

$$q_{n,k} = p_n (p_{n-1})^{k-2} h_{n-1}.$$

$n \rightarrow \infty$ で $p_n, p_{n-1} \rightarrow 1/3$, $h_{n-1} \rightarrow 2/3$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n,k} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3^k}.$$

▶ 解法 2

【方針】

到達確率の隣接差から h_j を求める。各周の出発点を跳び越した直後には必ず次の点にいるため、次の周で再び跳び越す確率と、初めて踏む確率を同じ数列で表す。最後は $n \rightarrow \infty$ の極限だけを掛け合わせる。

【解答】

距離 j をちょうど踏む確率を h_j とすると

$$h_0 = 1, \quad h_1 = \frac{1}{2}, \quad h_j = \frac{h_{j-1} + h_{j-2}}{2}.$$

したがって

$$h_j - h_{j-1} = -\frac{1}{2}(h_{j-1} - h_{j-2})$$

であり、

$$h_j = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^j.$$

(1)

距離 $n-1$ を踏んだ後に 2 点進む場合に限り出発点を跳び越す。よって

$$p_n = \frac{h_{n-1}}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

(2)

1 周目を跳び越した直後は、出発点の 1 点先にいる。そこから次の出発点を再び跳び越す確率は

$$\frac{h_{n-2}}{2} = p_{n-1},$$

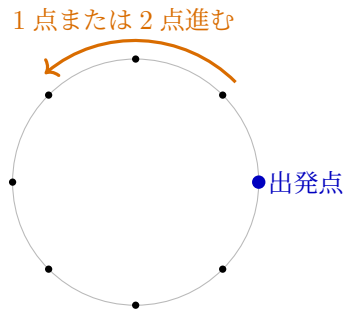
ちょうど踏む確率は h_{n-1} である。各区間のコイン投げは独立だから

$$q_{n,k} = p_n (p_{n-1})^{k-2} h_{n-1}.$$

$$p_n \longrightarrow \frac{1}{3}, \quad p_{n-1} \longrightarrow \frac{1}{3}, \quad h_{n-1} \longrightarrow \frac{2}{3}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n,k} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3^k}.$$



【総評】 難度 8、計算量 6。各周を独立な同型問題として扱うには、跳び越し後の位置が目標の 1 点先であることが重要である。有限 n の式から極限を厳密に導いた。最初の周だけ距離 n 、以後は距離 $n - 1$ となる違いを式に反映し、指数 $k - 2$ も確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。2 解法の結論を相互照合し、定義域、端点、場合分け、問題文の解釈、図示範囲を確認した。