

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1997 年 度 文 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

単位円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P をとり，定点 $A(-2, 0)$ から P へ線分を引き，その線分の P の側の延長線上に点 Q を $\overline{AP} \cdot \overline{PQ} = 3$ となるようにとる．ただし， $\overline{AP}$ は線分 AP の長さを表す．

- (1) $s = \overline{AP}$ ， $t = \overline{OQ}$ において， t を s で表せ．ただし， $O(0, 0)$ は原点である．
- (2) 点 P が円 C 上を動くとき，点 Q の描く軌跡を求めよ．

第 2 問

自然数 n の約数の個数を d とする. n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k ($1 \leq k \leq d$) とする. したがって, $a_1 = 1$, $a_d = n$, $a_k < a_{k+1}$ ($1 \leq k < d$) である. このとき, n に対する次の 2 つの条件 (イ), (ロ) は互いに同値 ((イ) $\iff$ (ロ)) であることを示せ.

(イ) n は 60 の倍数である.

(ロ) n は 6 個以上の約数を持ち, $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_2}$ となる.

第 3 問

面積 1 の 3 角形 $\triangle ABC$ において、辺 AB 上に 1 点 P をとり、 P を通り辺 BC に平行な直線と辺 AC の交点を Q とする。さらに線分 PQ の中点に関して A と対称な点を R とする。点 P が辺 AB 上を動くとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の共通部分の面積 S の最大値を求めよ。

第 4 問

2 次関数 $y = (ax + b)^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を $M(a, b)$ とする. このとき, 次の不等式 $(*)$ が任意の実数 a, b に対して成り立つような実数 m の中で最小のものを求めよ.

$(*)$

$$M(a, b) \leq m \int_0^1 (ax + b)^2 dx$$

第 5 問

箱の中に 1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードが合計 N 枚入れている。1 回の試行で、箱の中からでたために 1 枚のカードを取り出し、その数字を見た上で、箱の中に戻す。

A , B 2 人がそれぞれ試行を 2 回または 3 回行って、その間に取り出したカードに書かれている数の合計が大きい方を勝ちとするゲームを行う。ただし、1 人が 3 回の試行を行って、取り出した数の合計が 7 または 9 の場合には、その人の得点は 0 とする規則である。

そこで A , B はそれぞれ次の作戦でゲームを行うことにした。

A : 2 回目までの合計が 2 のときは 3 回目を行い、4 または 6 のときは 3 回目を行わない。

B : 2 回目までの合計が 2 または 4 のときは 3 回目を行い、6 のときは 3 回目を行わない。

1 と書かれたカードの枚数を n ($0 < n < N$) とし、 $p = \frac{n}{N}$ とする。

- (1) A の得点の期待値 E_A , B の得点の期待値 E_B をそれぞれ p で表せ。また、 $E_A > E_B$ となるための p の条件を求めよ。
- (2) A の勝つ確率を P_A , B の勝つ確率を P_B とするとき:「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」といえるか？

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)