

京都大学 1997 年度 文系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

単位円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P をとり、定点 $A(-2, 0)$ から P へ線分を引き、その線分の P の側の延長線上に点 Q を $\overline{AP} \cdot \overline{PQ} = 3$ となるようにとる。ただし、 $\overline{AP}$ は線分 AP の長さを表す。

(1) $s = \overline{AP}$, $t = \overline{OQ}$ において、 t を s で表せ。ただし、 $O(0, 0)$ は原点である。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき、点 Q の描く軌跡を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず三角形 AOP で余弦定理を使い、 $s = AP$ から $\cos \angle OAP$ を表す。次に $PQ = 3/s$ より $AQ = s + 3/s$ であることを三角形 AOQ に入れると、 s を含む項が消えて $OQ = 2$ が出る。軌跡では、 Q が半径 2 の円上にあるだけでなく、直線 AQ が単位円と交わる方向に限られることを確認する。境界は点 A から単位円へ引いた 2 本の接線で決まり、対応する Q を求めて円弧の範囲を決める。

【解答】

(1) $\angle OAP = \theta$ とおく。 $AO = 2$, $OP = 1$, $AP = s$ であるから、三角形 AOP に余弦定理を用いて $1^2 = 2^2 + s^2 - 2 \cdot 2 \cdot s \cos \theta$ すなわち $\cos \theta = \frac{s^2 + 3}{4s}$ を得る。

条件 $AP \cdot PQ = 3$ より $PQ = \frac{3}{s}$ である。 Q は A, P を結ぶ直線上で P の外側にあるので $AQ = AP + PQ = s + \frac{3}{s}$ である。 $t = OQ$ として、三角形 AOQ に余弦定理を用いると

$$t^2 = 2^2 + \left(s + \frac{3}{s}\right)^2 - 2 \cdot 2 \left(s + \frac{3}{s}\right) \cos \theta$$

である。ここに $\cos \theta = (s^2 + 3)/(4s)$ を代入すると

$$\begin{aligned} t^2 &= 4 + \left(s + \frac{3}{s}\right)^2 - 4 \left(s + \frac{3}{s}\right) \frac{s^2 + 3}{4s} \\ &= 4 + \frac{(s^2 + 3)^2}{s^2} - \frac{(s^2 + 3)^2}{s^2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

したがって $t > 0$ より $t = 2$ である。

(2) (1) より、 Q は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にある。

ただし、円 $x^2 + y^2 = 4$ 全体が軌跡になるわけではない。点 Q から見れば、直線 AQ が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と交わり、その交点のうち A から見て Q 側にある点が P でなければならない。したがって、 A から単位円に引いた 2 本の接線が軌跡の境界になる。

接点を (u, v) とすると、接線は半径 $O(u, v)$ と直交するので $(u, v) \cdot (-2 - u, -v) = 0$ である。 $u^2 + v^2 = 1$ を用いると $-2u - 1 = 0$ すなわち $u = -\frac{1}{2}$, $v = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。この接線と円 $x^2 + y^2 = 4$ との、 A でない方の交点は $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ である。

また、 $P = (1, 0)$ のときは $Q = (2, 0)$ となり、右側の円弧が実際に通過される。よって求める軌跡は $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 1$ で表される円弧である。端点 $(1, \pm\sqrt{3})$ も、接線の場合として含まれる。

▶ 解法 2

【方針】

点 $P = (u, v)$ と置き、 $AP^2 = 5 + 4u$ を使って点 Q の位置ベクトルを直接表す。内積を展開すると $OQ^2 = 4$ が恒等的に得られる。軌跡の範囲は、点 A から単位円へ引く 2 接線の間にある方向として決め、逆にその円弧上の各点から P を復元できることも確認する。

【解答】

(1)

$$P = (u, v), \quad u^2 + v^2 = 1$$

と置く。このとき

$$s^2 = AP^2 = (u + 2)^2 + v^2 = 5 + 4u.$$

条件 $AP \cdot PQ = 3$ より、 Q は P から $\overrightarrow{AP}$ の向きへ長さ $3/s$ だけ進んだ点である。したがって

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{s^2} \overrightarrow{AP}.$$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 1 + 2u$ だから

$$\begin{aligned} OQ^2 &= 1 + \frac{6(1 + 2u)}{5 + 4u} + \frac{9}{5 + 4u} \\ &= 4. \end{aligned}$$

よって $t = OQ > 0$ から

$$t = 2.$$

(2) 上の計算から Q は円

$$x^2 + y^2 = 4$$

上にある。ただし、直線 AQ が単位円と交わる方向だけが許される。その境界は A から単位円への 2 本の接線である。

接点を $T = (\xi, \eta)$ とすると

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{AT} = 0.$$

したがって

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

この 2 接線が半径 2 の円と再び交わる点は

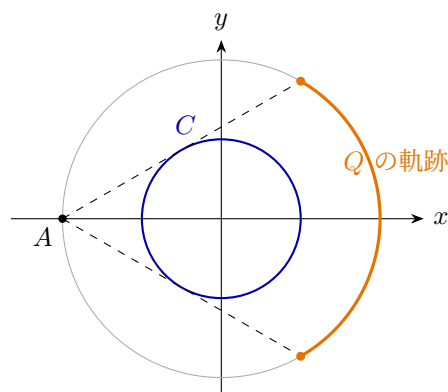
$$(1, \sqrt{3}), \quad (1, -\sqrt{3})$$

である。 $P = (1, 0)$ では $Q = (2, 0)$ となるので、通るのは右側の円弧である。

逆にこの円弧上の Q を取れば、半直線 AQ は単位円と交わる。その A から遠い方の交点を P とすると、上の恒等式を逆にたどって $AP \cdot PQ = 3$ が成り立つ。ゆえに軌跡は

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 1$$

であり、両端も含む。



【総評】 円外の点から単位円上の点へ線を伸ばす軌跡問題で、計算自体は標準だが、最後の範囲決定を落としやすい。目安時間は 18 分前後。(1) は余弦定理の代入で $(s^2 + 3)^2/s^2$ が消える構造をはっきり書くのが得点源である。(2) では $OQ = 2$ から円全体と即断せず、直線 AQ が単位円と交わる方向だけを残す。接線の接点を求める、または点から円を見込む角で考える、という境界確認が答案の締めになる。

【第 2 問】

自然数 n の約数の個数を d とする. n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k ($1 \leq k \leq d$) とする. したがって, $a_1 = 1$, $a_d = n$, $a_k < a_{k+1}$ ($1 \leq k < d$) である. このとき, n に対する次の 2 つの条件 (イ), (ロ) は互いに同値 ((イ) $\iff$ (ロ)) であることを示せ.

(イ) n は 60 の倍数である.

(ロ) n は 6 個以上の約数を持ち, $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_2}$ となる.

▶ 解法 1

【方針】

(イ) から (ロ) は、60 の倍数なら 1, 2, 3, 4, 5, 6 がすべて約数になり、最初の 6 個の約数がそのまま決まることを使う。逆向きでは a_2 が最小の素約数であることを先に押さえ、 $p = a_2$ として分数条件を $(a_3 - p)(a_6 - p) = p^2$ に変形する。 p が素数で、 $a_3 - p < a_6 - p$ であることから因数の組が強く制限され、 $a_3 = p + 1$ を得る。そこから $p \geq 3$ を排除して $p = 2$ を出し、 $a_3 = 3$, $a_6 = 6$ の間にある約数を使って 4, 5 も約数であることを示す。

【解答】

まず (イ) を仮定する。 n が 60 の倍数なら、1, 2, 3, 4, 5, 6 はすべて n の約数である。また、1 から 6 までの自然数でこれ以外に挟まる数はないから、約数を小さい順に並べると $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, $a_6 = 6$ である。したがって $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \frac{1}{a_2}$ となり、(ロ) が成り立つ。

次に (ロ) を仮定する。 a_2 は n の 1 より大きい最小の約数である。もし a_2 が合成数なら、その 1 より大きい真の約数も n を割り、 a_2 より小さい約数になってしまう。よって a_2 は素数である。そこで $p = a_2$ とおく。

条件 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{p}$ を整理する。両辺に pa_3a_6 を掛けて $p(a_3 + a_6) = a_3a_6$ を得る。これを移項して $a_3a_6 - pa_3 - pa_6 = 0$ すなわち $(a_3 - p)(a_6 - p) = p^2$ である。

約数は小さい順に並んでいるので $p = a_2 < a_3 < a_6$ であり、したがって $0 < a_3 - p < a_6 - p$ である。 p は素数だから、 p^2 の正の因数の組は $(1, p^2)$ または (p, p) である。ここでは 2 つの因数が等しくないので $a_3 - p = 1$, $a_6 - p = p^2$ でなければならない。よって $a_3 = p + 1$ である。

もし $p \geq 3$ なら、 p は奇素数であるから $p + 1$ は偶数である。ところが $a_3 = p + 1$ は n の約数なので、 n は偶数となり、2 が n の約数になる。これは $p = a_2$ が 1 より大きい最小の約数であることに反する。したがって $p = 2$ である。

これより $a_2 = 2$, $(a_3 - 2)(a_6 - 2) = 4$ かつ $a_3 - 2 < a_6 - 2$ であるから $a_3 = 3$, $a_6 = 6$ である。 a_4, a_5 は 3 より大きく 6 より小さい n の約数なので、自然数としては $a_4 = 4$, $a_5 = 5$ しかない。したがって 2, 3, 4, 5 はすべて n の約数である。

よって n は $\text{lcm}(2, 3, 4, 5) = 60$ の倍数である。以上により、(イ) と (ロ) は互いに同値である。

▶ 解法 2

【方針】

逆向きの証明を、単位分数方程式の補題として切り出す。素数 p と $p < x < y$ が $1/x + 1/y = 1/p$ を満たすなら、正の因数分解から $(x, y) = (p+1, p+p^2)$ と一意に決まる。この補題を最初の約数 a_2, a_3, a_6 へ適用し、約数の順序から $p = 2$ と $4, 5$ の存在を導く。

【解答】

まず次の補題を示す。

$$p \text{ が素数、} p < x < y、\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} \text{ なら } x = p+1, y = p+p^2. \quad (\text{補題})$$

実際、

$$xy = p(x+y)$$

を整理すると

$$(x-p)(y-p) = p^2.$$

$0 < x-p < y-p$ であり、 p^2 の異なる正の因数の組は $(1, p^2)$ だけだから、補題が従う。

(イ) $\Rightarrow$ (ロ) $60 \mid n$ なら $1, 2, 3, 4, 5, 6$ はすべて n の約数である。従って

$$(a_1, \dots, a_6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

であり、

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \frac{1}{a_2}.$$

(ロ) $\Rightarrow$ (イ) a_2 は 1 より大きい最小の約数だから素数である。 $p = a_2$ と置き、補題を

$$x = a_3, \quad y = a_6$$

へ適用すると

$$a_3 = p+1, \quad a_6 = p+p^2.$$

もし $p \geq 3$ なら p は奇数なので $a_3 = p+1$ は偶数である。 $a_3 \mid n$ なら $2 \mid n$ となり、最小素約数が $p \geq 3$ であることに反する。従って $p = 2$ である。

よって

$$a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_6 = 6.$$

a_4, a_5 は 3 と 6 の間にある異なる自然数なので

$$a_4 = 4, \quad a_5 = 5.$$

従って $2, 3, 4, 5$ がすべて n を割り、

$$\text{lcm}(2, 3, 4, 5) = 60$$

より $60 \mid n$ である。以上で両条件は同値である。

【総評】 小さい方から並べた約数の順序情報を使い切る整数証明で、難度は高め。目安時間は 25 分前後。順方向はすぐだが、逆方向では a_2 が素数である理由、分数式を $(a_3-p)(a_6-p) = p^2$ へ直す計算、そして因数の組が $(1, p^2)$ に限られる理由を省かないことが重要である。最後に $a_6 = 6$ だけで止めず、 a_4, a_5 が $4, 5$ であることまで言い切ると、60 の倍数への接続が明確になる。

【第 3 問】

面積 1 の 3 角形 $\triangle ABC$ において、辺 AB 上に 1 点 P をとり、 P を通り辺 BC に平行な直線と辺 AC の交点を Q とする。さらに線分 PQ の中点に関して A と対称な点を R とする。点 P が辺 AB 上を動くとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の共通部分の面積 S の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

面積比と平行性はアフィン変換で保たれるので、 $\triangle ABC$ を扱いやすい面積 1 の三角形 $A = (0, 1), B = (-1, 0), C = (1, 0)$ に移してよい。 $\lambda = AP/AB$ とおくと、 P, Q, R の座標がすべて λ で表せる。 R が辺 BC の上側にある $0 \leq \lambda \leq 1/2$ では $\triangle PQR$ 全体が共通部分になる。 $\lambda > 1/2$ では R が下に出るので、辺 PR, QR と BC の交点を求め、共通部分を台形として面積を出す。最後に 2 つの範囲で最大値を比較する。

【解答】

面積比、平行性、中点、点対称はアフィン変換で保たれる。したがって、面積が 1 である三角形 $A = (0, 1), B = (-1, 0), C = (1, 0)$ で考えてよい。 $\lambda = \frac{AP}{AB}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) とおく。点 P は辺 AB 上を A から B へ λ だけ進んだ点なので $P = (-\lambda, 1 - \lambda)$ である。 $PQ \parallel BC$ より PQ は水平で、 Q は辺 AC 上にあるから $Q = (\lambda, 1 - \lambda)$ である。線分 PQ の中点は $(0, 1 - \lambda)$ である。これに関して $A = (0, 1)$ と対称な点が R なので $R = (0, 1 - 2\lambda)$ である。

まず $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ のときを考える。このとき R は BC 上またはその上側にあり、 P, Q, R はいずれも $\triangle ABC$ 内にある。したがって共通部分は $\triangle PQR$ 全体である。 $PQ = 2\lambda$ 、 R から PQ までの高さは λ だから $S = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \cdot \lambda = \lambda^2$ である。

次に $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ のときを考える。このとき R は辺 BC の下側にある。直線 PR は $P = (-\lambda, 1 - \lambda)$ と $R = (0, 1 - 2\lambda)$ を通るので傾きは -1 であり、方程式は $y = -x + 1 - 2\lambda$ である。よって BC 、すなわち $y = 0$ との交点は $(1 - 2\lambda, 0)$ である。同様に直線 QR は $y = x + 1 - 2\lambda$ であり、 BC との交点は $(2\lambda - 1, 0)$ である。

したがって共通部分は、上底 PQ の長さが 2λ 、下底の長さが $(2\lambda - 1) - (1 - 2\lambda) = 4\lambda - 2$ 高さが $1 - \lambda$ の台形である。ゆえに $S = \frac{2\lambda + (4\lambda - 2)}{2}(1 - \lambda) = (3\lambda - 1)(1 - \lambda)$ である。

以上より

$$S = \begin{cases} \lambda^2 & \left(0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\right), \\ (3\lambda - 1)(1 - \lambda) & \left(\frac{1}{2} < \lambda \leq 1\right) \end{cases}$$

である。前半では $S = \lambda^2$ が増加するので最大値は $\frac{1}{4}$ である。後半では

$$(3\lambda - 1)(1 - \lambda) = -3\lambda^2 + 4\lambda - 1 = -3\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

であるから、 $\lambda = 2/3$ で最大値 $\frac{1}{3}$ をとる。 $1/3 > 1/4$ なので、求める最大値は $\frac{1}{3}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

座標を置かず、 $\lambda = AP/AB$ として相似比と高さの比だけで面積を表す。 R が辺 BC の上側にある場合は三角形、下側に出る場合は台形となる。平行線に沿う長さや高さをすべて BC と元の高さの倍数で表し、元の面積が 1 であることを最後に使う。

【解答】

三角形 ABC の BC に対する高さを H 、 BC の長さを c とする。面積が 1 だから

$$\frac{1}{2}cH = 1. \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{AP}{AB} \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

と置く。 $PQ \parallel BC$ より相似比から

$$PQ = \lambda c.$$

また PQ は BC から高さ $(1 - \lambda)H$ の位置にある。 PQ の中点に関して A を移した点が R なので、 R の BC からの符号付き高さは

$$(1 - 2\lambda)H$$

である。

$0 \leq \lambda \leq 1/2$ のとき、 $\triangle PQR$ 全体が $\triangle ABC$ に含まれる。底辺 $PQ = \lambda c$ 、高さは λH だから

$$S = \frac{1}{2}(\lambda c)(\lambda H) = \lambda^2.$$

$1/2 < \lambda \leq 1$ のとき、 R は BC の下側にある。相似関係から、辺 PR, QR が BC 上に切り取る下底の長さは

$$(2\lambda - 1)c$$

である。従って共通部分は、高さ $(1 - \lambda)H$ 、2 本の平行な辺が $\lambda c, (2\lambda - 1)c$ の台形である。(1) を使うと

$$\begin{aligned} S &= \frac{\lambda c + (2\lambda - 1)c}{2}(1 - \lambda)H \\ &= (3\lambda - 1)(1 - \lambda). \end{aligned}$$

よって

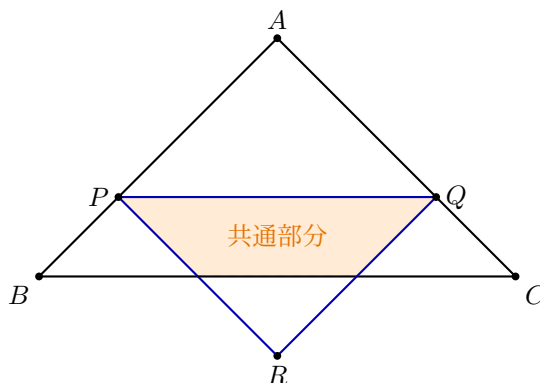
$$S = \begin{cases} \lambda^2 & (0 \leq \lambda \leq 1/2), \\ (3\lambda - 1)(1 - \lambda) & (1/2 < \lambda \leq 1). \end{cases}$$

前半の最大値は $1/4$ 。後半は

$$(3\lambda - 1)(1 - \lambda) = -3 \left(\lambda - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3}$$

だから最大値は

$$\frac{1}{3}.$$



【総評】 図形をそのまま追うより、面積 1 の標準三角形に移して座標化すると見通しがよい問題である。難度は高め、目安時間は 25 分前後。採点上は、アフィン変換で面積比が保たれること、 R の位置が $\lambda = 1/2$ を境に変わること、 $\lambda > 1/2$ で共通部分が三角形ではなく台形になることが重要である。最大化は平方完成で短く済むが、面積式の取り違えが起きやすいので、上底・下底・高さを明記すると安定する。

【第 4 問】

2 次関数 $y = (ax + b)^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を $M(a, b)$ とする。このとき、次の不等式 (*) が任意の実数 a, b に対して成り立つような実数 m の中で最小のものを求めよ。

(*)

$$M(a, b) \leq m \int_0^1 (ax + b)^2 dx$$

▶ 解法 1

【方針】

一次式 $ax + b$ を係数 a, b で直接扱うより、区間の両端の値 $u = b, v = a + b$ に置き換える。最大値は $\max(u^2, v^2)$ 、積分は $(u^2 + uv + v^2)/3$ となるので、求める定数はその比の最大値である。 $v^2 \geq u^2$ なら $t = u/v$ として $-1 \leq t \leq 1$ 上で分母 $t^2 + t + 1$ を最小にすればよい。最後に等号を与える端点値を示し、 $m = 4$ より小さくできないことも確認する。

【解答】

$u = b, v = a + b$ とおく。すると $ax + b$ は、 $x = 0$ で u 、 $x = 1$ で v をとる一次式である。逆に、任意の実数 u, v に対して $b = u, a = v - u$ とすればよいので、 u, v で考えても一般性を失わない。

一次式の絶対値の最大は端点で起こるから $M(a, b) = \max(u^2, v^2)$ である。また $ax + b = (1 - x)u + xv$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax + b)^2 dx &= \int_0^1 \{(1 - x)u + xv\}^2 dx \\ &= u^2 \int_0^1 (1 - x)^2 dx + 2uv \int_0^1 x(1 - x) dx + v^2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{u^2 + uv + v^2}{3}. \end{aligned}$$

$(u, v) = (0, 0)$ のときは両辺とも 0 なので問題ない。以下、 $(u, v) \neq (0, 0)$ とする。 $v^2 \geq u^2$ の場合を考える。 $v \neq 0$ であり、 $t = u/v$ とおくと $-1 \leq t \leq 1$ である。このとき

$$\frac{M(a, b)}{\int_0^1 (ax + b)^2 dx} = \frac{v^2}{(u^2 + uv + v^2)/3} = \frac{3}{t^2 + t + 1}$$

である。 $-1 \leq t \leq 1$ において $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ だから、最小値は $3/4$ である。よってこの場合の比の最大値は $\frac{3}{3/4} = 4$ である。 $u^2 \geq v^2$ の場合も、 u と v を入れ替えれば同じ議論により比の最大値は 4 である。したがって、すべての a, b について

$$M(a, b) \leq 4 \int_0^1 (ax + b)^2 dx$$

が成り立つ。

一方、例えば $v = 1, u = -1/2$ とすると、 $v^2 \geq u^2$ かつ $t = -1/2$ であり、上の比はちょうど 4 になる。したがって m を 4 より小さくすることはできない。求める最小値は $m = 4$ である。

▶ 解法 2

【方針】

一次式の端点値を $u = b$, $v = a + b$ と置く。積分値を端点値で表した後、最大値が v^2 の場合と u^2 の場合に分け、4 倍した積分との差を完全平方へ直す。等号を実現する端点値も同時に読み取り、最良定数であることを一度に示す。

【解答】

端点値を

$$u = b, \quad v = a + b$$

と置く。このとき

$$M(a, b) = \max(u^2, v^2)$$

であり、

$$\int_0^1 (ax + b)^2 dx = \frac{u^2 + uv + v^2}{3}. \quad (1)$$

まず $M(a, b) = v^2$ の場合、

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 (ax + b)^2 dx - M(a, b) &= \frac{4u^2 + 4uv + v^2}{3} \\ &= \frac{(2u + v)^2}{3} \geq 0. \end{aligned}$$

$M(a, b) = u^2$ の場合も

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 (ax + b)^2 dx - M(a, b) &= \frac{u^2 + 4uv + 4v^2}{3} \\ &= \frac{(u + 2v)^2}{3} \geq 0. \end{aligned}$$

従ってすべての a, b に対して

$$M(a, b) \leq 4 \int_0^1 (ax + b)^2 dx$$

が成り立つ。

一方、

$$v = 1, \quad u = -\frac{1}{2}$$

と取れば $M = 1$ で、(1) の積分値は $1/4$ となる。従って比はちょうど 4 であり、4 より小さい定数では不等式が成り立たない。よって最小の m は

$$m = 4.$$

【総評】 最良定数を求める積分不等式で、発想はやや難しいが計算は整理できる。目安時間は 20 分前後。 a, b のまま微分するより、一次式の端点値 u, v に変えるのが本問の核心である。答案では「 $m = 4$ で成り立つ」だけでなく、「比が 4 になる例があるのでそれ未満は不可」まで書いて最小性を保証する必要がある。平方完成の第 2 解法は、十分性と等号条件を短く確認できるので見直しにも有効である。

【第 5 問】

箱の中に 1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードが合計 N 枚入れている。1 回の試行で、箱の中からでたらめに 1 枚のカードを取り出し、その数字を見た上で、箱の中に戻す。

A, B 2 人がそれぞれ試行を 2 回または 3 回行って、その間に取り出したカードに書かれている数の合計が大きい方を勝ちとするゲームを行う。ただし、1 人が 3 回の試行を行って、取り出した数の合計が 7 または 9 の場合には、その人の得点は 0 とする規則である。

そこで A, B はそれぞれ次の作戦でゲームを行うことにした。

A: 2 回目までの合計が 2 のときは 3 回目を行い、4 または 6 のときは 3 回目を行わない。

B: 2 回目までの合計が 2 または 4 のときは 3 回目を行い、6 のときは 3 回目を行わない。

1 と書かれたカードの枚数を n ($0 < n < N$) とし、 $p = \frac{n}{N}$ とする。

(1) A の得点の期待値 E_A , B の得点の期待値 E_B をそれぞれ p で表せ。また、 $E_A > E_B$ となるための p の条件を求めよ。

(2) A の勝つ確率を P_A , B の勝つ確率を P_B とするとき、「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」といえるか？

▶ 解法 1

【方針】

1 が出る確率を p 、3 が出る確率を $q = 1 - p$ とおく。まず A と B それぞれについて、2 回目までの和ごとの行動を分け、最終得点の確率分布を表にする。期待値はその表から直接計算し、 $E_A - E_B$ を因数分解して条件を出す。(2) では期待値ではなく勝つ確率を比較するので、同じ分布表から $P_A - P_B$ を独立な 2 人の得点の大小比較として計算する。 $E_A > E_B$ を満たすが $P_A < P_B$ となる p を 1 つ示せば、命題は否定できる。

【解答】

(1) 3 が出る確率を $q = 1 - p$ とおく。

A は、2 回目までの合計が 2 のときだけ 3 回目を行う。したがって A の得点分布は次のようになる。

得点	3	4	5	6
確率	p^3	$2pq$	p^2q	q^2

実際、最初の 2 回が 1, 1 なら 3 回目を行い、3 回目が 1 なら得点 3、3 なら得点 5 である。最初の 2 回の和が 4 または 6 ならそこで止まる。

よって

$$\begin{aligned} E_A &= 3p^3 + 4 \cdot 2pq + 5p^2q + 6q^2 \\ &= -2p^3 + 3p^2 - 4p + 6 \end{aligned}$$

である。

B は、2 回目までの合計が 2 または 4 のとき 3 回目を行う。ただし 3 回行って合計が 7 または 9 なら得点は 0 である。B の得点分布は

得点	0	3	5	6
確率	$2pq^2$	p^3	$3p^2q$	q^2

である。ここで得点 0 は、最初の 2 回が 1, 3 または 3, 1、3 回目が 3 の場合である。

したがって

$$\begin{aligned} E_B &= 3p^3 + 5 \cdot 3p^2q + 6q^2 \\ &= -12p^3 + 21p^2 - 12p + 6 \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} E_A - E_B &= 10p^3 - 18p^2 + 8p \\ &= 2p(1-p)(4-5p) \end{aligned}$$

となる。 $0 < p < 1$ より $2p(1-p) > 0$ だから $E_A > E_B$ となる条件は $0 < p < \frac{4}{5}$ である。

(2) A と B の得点は独立であり、上の分布表から勝率を比較できる。A の得点が B の得点より大きい場合を足し、B の得

点が A の得点より大きい場合を引くと

$$\begin{aligned} P_A - P_B &= p^3(2pq^2) + 2pq(2pq^2 + p^3) + p^2q(2pq^2 + p^3) \\ &\quad + q^2(2pq^2 + p^3 + 3p^2q) \\ &\quad - 3p^2q(p^3 + 2pq) - q^2(p^3 + 2pq + p^2q). \end{aligned}$$

これを $q = 1 - p$ で整理すると $P_A - P_B = 2p^2(1 - p)^2(p^2 - 4p + 2)$ である。

ここで $p = \frac{3}{4}$ とする。このとき $0 < p < 4/5$ なので、(1) より $E_A > E_B$ である。一方、 $p^2 - 4p + 2 = \frac{9}{16} - 3 + 2 = -\frac{7}{16} < 0$ であるから $P_A - P_B < 0$ すなわち $P_A < P_B$ である。

したがって $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ とはいえない。

▶ 解法 2

【方針】

A・B の得点分布を確率母関数として一つの式にまとめる。期待値は形式的に微分して $z = 1$ を代入し、勝率差は 2 つの分布の係数を得点順に並べた大小比較表で計算する。作戦ごとの経路を逐一文章で追う解法 1 とは別に、分布を代数的な対象として処理する。

【解答】

3 が出る確率を $q = 1 - p$ とする。得点 r の確率を z^r の係数にした式を作ると、A と B について

$$\begin{aligned} F_A(z) &= p^3 z^3 + 2pq z^4 + p^2 q z^5 + q^2 z^6, \\ F_B(z) &= 2pq^2 + p^3 z^3 + 3p^2 q z^5 + q^2 z^6. \end{aligned}$$

各係数の和は 1 であり、これが得点分布を表す。

(1) 期待値は

$$E_A = F'_A(1), \quad E_B = F'_B(1)$$

だから

$$\begin{aligned} E_A &= -2p^3 + 3p^2 - 4p + 6, \\ E_B &= -12p^3 + 21p^2 - 12p + 6. \end{aligned}$$

従って

$$E_A - E_B = 2p(1 - p)(4 - 5p).$$

$0 < p < 1$ より

$$E_A > E_B \iff 0 < p < \frac{4}{5}.$$

(2) 勝率差は、A の各得点について「それより小さい B の確率」から「それより大きい B の確率」を引いて重み付けすればよい。得点順に係数を代入して整理すると

$$P_A - P_B = 2p^2(1 - p)^2(p^2 - 4p + 2).$$

ここで

$$p = \frac{3}{4}$$

を取ると $E_A > E_B$ である一方、

$$p^2 - 4p + 2 = -\frac{7}{16} < 0$$

なので $P_A < P_B$ である。従って

「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」とはいえない。

【総評】 期待値の大小と勝率の大小が一致しないことを、分布表から実際に示す確率問題である。難度は高く、目安時間は 30 分前後。まず各作戦の「3 回目を引く条件」と「3 回引いたときの 0 点規則」を混同せず、得点分布を正しく作ることが最重要である。(2) では期待値の式を流用できないので、独立な 2 人の得点の大小比較を改めて行う必要がある。反例は $p = 3/4$ のように $E_A > E_B$ の範囲内で勝率差が負になる値を選べば十分である。