

京都大学 1997 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$C_1: y = x^2$ と $C: y = ax^2$ ($a \neq 1$) を考え、 C を (p, q) だけ平行移動した $C_{p,q}$ が C_1 と 2 点で交わり、一方が $C_{p,q}$ の頂点、他方では両接線が直交するような p, q が存在するための a の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$C_{p,q}: y = a(x-p)^2 + q$ と置く。頂点が C_1 上にある条件で q を消し、もう 1 つの交点と 2 本の傾きを p, a で表す。直交条件から $p^2 > 0$ となる a の範囲を判定する。

【解答】

平行移動後の放物線は

$$C_{p,q}: y = a(x-p)^2 + q$$

であり、その頂点は (p, q) である。頂点が C_1 上にあるから

$$q = p^2.$$

交点の x 座標は

$$x^2 = a(x-p)^2 + p^2$$

を満たす。整理して因数分解すると

$$(x-p)\{(1-a)x + (a+1)p\} = 0.$$

一方の交点は $x = p$ であり、他方を r とすると

$$r = \frac{a+1}{a-1}p.$$

2 点が異なるため $p \neq 0$ である。

$x = r$ における C_1 の接線の傾きは $2r$ 、 $C_{p,q}$ の接線の傾きは $2a(r-p)$ である。直交条件は

$$4ar(r-p) = -1.$$

ここで

$$r - p = \frac{2p}{a-1}$$

だから

$$\frac{8a(a+1)p^2}{(a-1)^2} = -1, \quad p^2 = -\frac{(a-1)^2}{8a(a+1)}.$$

この右辺が正となる必要十分条件は

$$a(a+1) < 0,$$

すなわち

$$-1 < a < 0.$$

逆にこの範囲なら右辺は正なので、その平方根のいずれかを p とし $q = p^2$ とおけば、2 交点は相異なり、他方で接線は直交する。従って求める範囲は $-1 < a < 0$ である。

▶ 解法 2

【方針】

頂点からもう一つの交点までの水平距離を $h = r - p$ と置く。頂点が $y = x^2$ 上にある条件を使うと、交点条件は h と p の一次関係になる。交点での 2 接線の傾きを p, h, a で書いて直交条件へ代入し、 $p^2 > 0$ となる範囲を判定する。

【解答】

平行移動後の放物線を

$$C_{p,q} : y = a(x - p)^2 + q$$

とする。頂点 (p, q) が $C_1 : y = x^2$ 上にあるから

$$q = p^2.$$

もう一つの交点の x 座標を $r = p + h$ と置く。2 点が異なるので $h \neq 0$ である。交点条件は

$$(p + h)^2 = ah^2 + p^2.$$

$h \neq 0$ で割ると

$$2p + (1 - a)h = 0, \quad h = \frac{2p}{a - 1}. \quad (1)$$

交点 $x = r$ における C_1 の接線の傾きは $2r = 2(p + h)$ 、 $C_{p,q}$ の接線の傾きは $2ah$ である。直交条件は

$$4ah(p + h) = -1.$$

(1) を代入して整理すると

$$p^2 = -\frac{(a - 1)^2}{8a(a + 1)}. \quad (2)$$

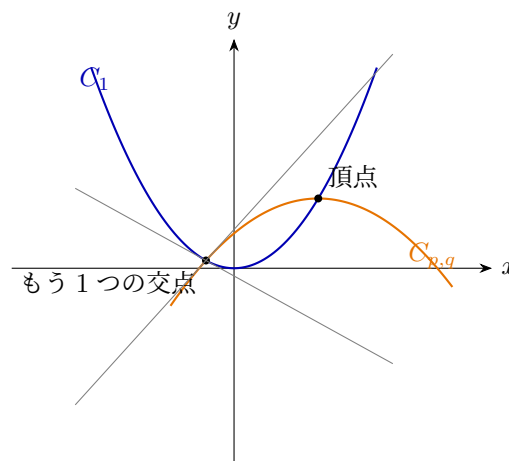
相異なる 2 交点を作るには $p \neq 0$ が必要であり、(2) の右辺が正でなければならない。 $a \neq 1$ だから、これは

$$a(a + 1) < 0$$

と同値である。従って

$$-1 < a < 0.$$

逆にこの範囲なら (2) で $p \neq 0$ を選べる。(1) で $h \neq 0$ 、 $q = p^2$ と定めれば、頂点ともう一つの交点が相異なり、その交点で 2 接線は直交する。よってこの範囲は必要十分である。



【総評】 難度 7、計算量 6。頂点条件で平行移動量を 1 つ消し、交点方程式を既知の根で因数分解するのが中心である。最後は存在条件を平方の正値性へ変換し、逆向きの構成も書いて必要十分性を確認した。

【第 2 問】

正整数列 $a_1, \dots, a_n$ が $1 \leq a_k \leq 2n$ を満たし、部分和

$$s_j = \sum_{k=1}^j a_k$$

がすべて平方数である。(1) $s_n = n^2$ を示せ。(2) a_k を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$s_j = m_j^2$ と置く。部分和は狭義増加なので m_j も狭義増加する。最後の差 a_n の上限から m_n を挟み、その後すべての m_j を決める。

【解答】

(1) $s_j = m_j^2$ とおく。 s_j は正で狭義増加するから、 m_j は正整数で

$$1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_n.$$

従って $m_n \geq n$ である。

一方 $m_{n-1} \leq m_n - 1$ だから

$$a_n = m_n^2 - m_{n-1}^2 \geq m_n^2 - (m_n - 1)^2 = 2m_n - 1.$$

仮定 $a_n \leq 2n$ より

$$2m_n - 1 \leq 2n,$$

従って整数 m_n は $m_n \leq n$ である。以上から $m_n = n$ 、すなわち

$$s_n = n^2.$$

(2) n 個の狭義増加する正整数

$$m_1 < m_2 < \dots < m_n = n$$

は

$$m_k = k \quad (1 \leq k \leq n)$$

でなければならない。 $s_0 = 0$ とおけば

$$a_k = s_k - s_{k-1} = k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1.$$

実際、 $1 \leq 2k - 1 \leq 2n - 1 < 2n$ であり、部分和は k^2 となるので条件を満たす。

▶ 解法 2

【方針】

平方数の平方根を m_j とした後、 n 個の相異なる正整数を $1, \dots, m_n$ の中へ入れるという個数の見方を使う。末項の差の上限で $m_n \leq n$ 、個数から $m_n \geq n$ を得て、両方の等号が成り立つためには平方根列が $1, 2, \dots, n$ そのものであると結論する。

【解答】

各部分 and を

$$s_j = m_j^2$$

と書く。 $a_j > 0$ なので

$$1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_n$$

は相異なる正整数列である。従って $1, \dots, m_n$ の中に n 個の相異なる正整数があることから

$$m_n \geq n. \quad (1)$$

一方、 $m_{n-1} \leq m_n - 1$ なので

$$\begin{aligned} a_n &= m_n^2 - m_{n-1}^2 \\ &\geq m_n^2 - (m_n - 1)^2 \\ &= 2m_n - 1. \end{aligned}$$

$a_n \leq 2n$ と合わせると $2m_n - 1 \leq 2n$ であり、整数性から

$$m_n \leq n. \quad (2)$$

(1)(2) より

$$m_n = n, \quad s_n = n^2.$$

さらに、 $1, \dots, n$ の中から相異なる正整数を増加順に n 個選ぶ方法は一つしかない。よって

$$m_j = j \quad (1 \leq j \leq n).$$

$s_0 = 0$ と置けば

$$a_j = s_j - s_{j-1} = j^2 - (j-1)^2 = 2j - 1.$$

この列は $1 \leq a_j \leq 2n - 1 < 2n$ を満たし、部分和は j^2 になるので、確かに条件を満たす。

【総評】 難度 6、計算量 3。平方数の平方根を狭義増加整数列として扱うと、最後の 1 項の上限だけで終点を決定できる。終点までに正整数がちょうど n 個並ぶことから全項が連続整数になり、解の一意性も同時に得られる。

【第 3 問】

単位球面上の 4 点 A, B, C, D が $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ を満たす. (1) $AB = CD$ を示せ. (2) B', D' を B, D の対蹠点とする. A, B', C, D' が相異なるなら、この順に長方形の頂点となることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

位置ベクトルを置く. (1) は和の関係から 2 本ずつの和の長さを比較して内積を一致させる. (2) は対角線の中点一致で平行四辺形を示し、対角線長が等しいことから長方形と結論する.

【解答】

位置ベクトルを

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$$

とおく. すべて長さ 1 で

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

(1)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -(\mathbf{c} + \mathbf{d})$$

だから両辺の長さの二乗を比較して

$$2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}.$$

従って $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$ であり、

$$AB^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = CD^2.$$

よって $AB = CD$ である.

(2) B', D' の位置ベクトルは $-\mathbf{b}, -\mathbf{d}$ である. 元の和から

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = -(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}.$$

従って線分 AC と $B'D'$ の中点は一致し、四角形 $AB'CD'$ は平行四辺形である.

また同様に

$$|\mathbf{c} - \mathbf{a}| = |\mathbf{b} - \mathbf{d}| = |(-\mathbf{d}) - (-\mathbf{b})|,$$

すなわち 2 本の対角線 $AC, B'D'$ は等しい. 対角線が等しい平行四辺形は長方形である. 4 点が相異なるという仮定により退化しないので、 A, B', C, D' はこの順に長方形の頂点である.

▶ 解法 2

【方針】

対蹠点を取った 4 点がまず平行四辺形になることを、対角線の中点一致で示す. 4 点はもとの単位球面上にあり、同時にその平行四辺形を含む平面上にあるので、一つの円に乗る. 円に内接する平行四辺形では対角の和が 180° かつ対角が等しいため、各角が直角になる.

【解答】

位置ベクトルを

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$$

とし、

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{a}| = \cdots = |\mathbf{d}| = 1$$

とする.

(1)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -(\mathbf{c} + \mathbf{d})$$

の両辺の長さを 2 乗すると

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}.$$

従って

$$\begin{aligned} AB^2 &= 2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= 2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = CD^2, \end{aligned}$$

よって $AB = CD$ である。

(2) B', D' の位置ベクトルは $-\mathbf{b}, -\mathbf{d}$ である。仮定から

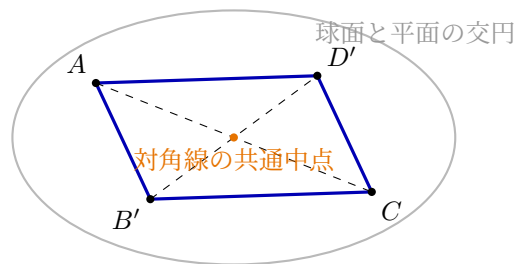
$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = -\mathbf{b} - \mathbf{d}$$

なので、線分 AC と $B'D'$ の中点は一致する。従って四角形 $AB'CD'$ は平行四辺形である。

4 点 A, B', C, D' はすべて単位球面上にあり、平行四辺形を含む一つの平面上にもある。この平面と球面の交わりは円だから、4 点は同一円周上にある。円に内接する四角形の対角の和は 180° であり、平行四辺形の対角は等しい。従って各対角は 90° である。4 点は相異なるので退化せず、

$$A, B', C, D'$$

はこの順に長方形の頂点となる。



【総評】 難度 6、計算量 4。和が 0 という条件は、2 本ずつの位置ベクトルの和が反対向きになることを意味する。中点一致と対角線等長という長方形の判定条件に翻訳し、相異なる点という仮定で退化も除いた。

【第 4 問】

$$y = 2x^2 - 1, \quad z = 2y^2 - 1, \quad x = 2z^2 - 1$$

について、(1) 実数解では $|x|, |y|, |z| \leq 1$ を示せ。(2) 相異なる実数解が全部で 8 組あることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 絶対値が最大の変数を選んで矛盾を示す。(2) $x = \cos \theta$ と置き、2 倍角公式で y, z を順に表して $\cos 8\theta = \cos \theta$ を解き、重複を除いて数える。

【解答】

(1) $M = \max(|x|, |y|, |z|)$ とする。 $M > 1$ と仮定し、例えば $M = |x|$ とする。このとき

$$y = 2x^2 - 1 = 2M^2 - 1 > M$$

である。最後の不等式は

$$2M^2 - 1 - M = (2M + 1)(M - 1) > 0$$

による。従って $|y| > M$ となり、 M の定義に矛盾する。他の変数が最大の場合も同様なので

$$|x|, |y|, |z| \leq 1.$$

(2) (1) より $x = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) と書ける。2 倍角公式から

$$y = \cos 2\theta, \quad z = \cos 4\theta.$$

第 3 式は

$$\cos \theta = 2 \cos^2 4\theta - 1 = \cos 8\theta$$

となる。従って

$$8\theta = 2k\pi + \theta \quad \text{または} \quad 8\theta = 2k\pi - \theta.$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ で得られる値は

$$\theta = \frac{2k\pi}{7} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

および

$$\theta = \frac{2k\pi}{9} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

である。両群で重なるのは $\theta = 0$ だけなので、相異なる値は $4 + 5 - 1 = 8$ 個である。

各 θ から

$$(x, y, z) = (\cos \theta, \cos 2\theta, \cos 4\theta)$$

を作れば元の 3 式をすべて満たす。また $0 \leq \theta \leq \pi$ では $\cos \theta$ が狭義減少するので、8 個の θ は相異なる 8 組を与える。逆に任意の解はこの形に帰着したから、解は全部で 8 組である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) で得た有界性から $x = (z + z^{-1})/2$, $|z| = 1$ と表し、写像 $2x^2 - 1$ が $z \mapsto z^2$ に対応することを使う。3 回反復の固定点条件は $z^8 + z^{-8} = z + z^{-1}$ となり、 $z^7 = 1$ または $z^9 = 1$ に分かれる。共役な根が同じ余弦を与えることを考慮して 8 組を数える。

【解答】

(1)

$$M = \max(|x|, |y|, |z|)$$

とする。もし $M > 1$ で、例えば $M = |x|$ なら

$$y = 2x^2 - 1 = 2M^2 - 1 > M$$

となり、 $|y| > M$ で矛盾する。他の変数が最大の場合も同じだから

$$|x|, |y|, |z| \leq 1.$$

(2) $|z_0| = 1$ を満たす複素数を使って

$$x = \frac{z_0 + z_0^{-1}}{2}$$

と表す。すると

$$2x^2 - 1 = \frac{z_0^2 + z_0^{-2}}{2}.$$

従って 3 回の写像の後に x へ戻る条件は

$$z_0^8 + z_0^{-8} = z_0 + z_0^{-1}.$$

これは

$$(z_0^7 - 1)(z_0^9 - 1) = 0$$

と同値である。従って z_0 は 7 乗根または 9 乗根である。

7 乗根から得られる実数 $x = (z_0 + z_0^{-1})/2$ は、共役な 2 根が同じ値を与えるため

$$1, \quad \cos \frac{2\pi}{7}, \quad \cos \frac{4\pi}{7}, \quad \cos \frac{6\pi}{7}$$

の 4 個である。9 乗根からは

$$1, \quad \cos \frac{2\pi}{9}, \quad \cos \frac{4\pi}{9}, \quad \cos \frac{6\pi}{9}, \quad \cos \frac{8\pi}{9}$$

の 5 個を得る。両方で重なるのは 1 だけだから、 x は

$$4 + 5 - 1 = 8$$

個である。

各 x に対して $y = 2x^2 - 1$, $z = 2y^2 - 1$ は一意に決まり、逆に上の根はすべて元の 3 式を満たす。よって相異なる実数解は全部で 8 組である。

【総評】 難度 8、計算量 5。最大絶対値による有界性と、2 倍角公式による周期点の数え上げが鮮やかにつながる。角の 2 系列の共通部分を確認し、余弦の単調性で異なる角が異なる解を与えることまで明示した。

【第 5 問】

青 3 枚、赤 2 枚、黄 1 枚から 1 枚を引き、同色カードを 1 枚加えて戻す試行を繰り返す。 n 回後の青カード枚数の期待値 $E(n)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

n 回後の青枚数を確率変数 B_n とする。現在の枚数を条件に、次回青が増える確率を求めて期待値の漸化式を作る。

【解答】

n 回の試行後の青カード枚数を B_n とする。全カードは $n+6$ 枚である。 $B_n = b$ であるとき、次の試行で青を引く確率は $b/(n+6)$ だから

$$E(B_{n+1} | B_n = b) = b + \frac{b}{n+6} = \frac{n+7}{n+6}b.$$

両辺の期待値を取ると

$$E(n+1) = \frac{n+7}{n+6}E(n).$$

初めは青が 3 枚なので $E(0) = 3$ である。従って

$$E(n) = 3 \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{n+6}{n+5} = 3 \cdot \frac{n+6}{6} = \frac{n+6}{2}.$$

よって求める期待値は

$$E(n) = \frac{n+6}{2}.$$

▶ 解法 2

【方針】

各回に新しく加わるカードの色だけに注目する。試行直前の青の割合の条件付き期待値が初期の青割合 $1/2$ のまま保たれることを帰納法で示す。従って各回に加わるカードが青である確率は常に $1/2$ であり、青の増加枚数の期待値を線形性で足す。

【解答】

初めの青カードの割合は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

j 回後の青カード枚数を B_j とする。次に加わるカードが青である条件付き確率は

$$\frac{B_j}{j+6}$$

である。従って

$$E(B_{j+1} | B_j) = B_j + \frac{B_j}{j+6}.$$

両辺を $j+7$ で割ると

$$E\left(\frac{B_{j+1}}{j+7} \middle| B_j\right) = \frac{B_j}{j+6}.$$

期待値を取れば

$$E\left(\frac{B_{j+1}}{j+7}\right) = E\left(\frac{B_j}{j+6}\right).$$

従って期待される青の割合はすべての段階で初期値 $1/2$ のままである。

ゆえに

$$\frac{E(n)}{n+6} = \frac{1}{2}$$

であり、

$$E(n) = \frac{n+6}{2}.$$

これは「各回に新しく加わる 1 枚が青である確率の平均は $1/2$ 」であり、初めの 3 枚に期待される青の増分 $n/2$ を加える、と見ても同じである。

【総評】 難度 5、計算量 3。各段階で青を引く確率は青の現在枚数に比例するため、条件付き期待値が一次式になる。確率分布全体を求めず、期待値の線形性で閉じた漸化式を作り、望遠積で一般項を得た。

【第 6 問】

曲線 $C: x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) について、(1) 長さ L 、(2) C と両座標軸で囲まれる面積 S を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 両座標を微分して速度を求める。(2) 曲線と座標軸からなる閉曲線の面積を、媒介変数による面積公式で計算する。

【解答】

(1)

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}(\cos t + \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^{-t}(\cos t - \sin t).$$

従って速度は

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2}e^{-t}.$$

よって

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}e^{-t} dt = \sqrt{2}(1 - e^{-\pi/2}).$$

(2) 曲線は $(1, 0)$ から $(0, e^{-\pi/2})$ へ進む。座標軸上の部分は面積積分への寄与が 0 なので

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

被積分関数は

$$e^{-2t} \{ \cos t (\cos t - \sin t) + \sin t (\cos t + \sin t) \} = e^{-2t}$$

である。従って

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2t} dt = \frac{1 - e^{-\pi}}{4}.$$

▶ 解法 2

【方針】

媒介表示を極座標 $r = e^{-\theta}$, $\theta = t$ と読み替える。(1) は極座標曲線の微小長さ $\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta$ 、(2) は微小扇形の面積 $(1/2)r^2 d\theta$ を積分する。直交座標の微分式とは別の幾何的な導出である。

【解答】

与えられた曲線は極座標で

$$r = e^{-\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

と表される対数らせんである。

(1) 極座標曲線の微小長さは

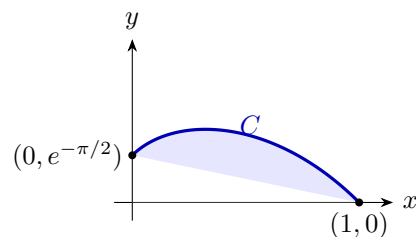
$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

ここでは $dr/d\theta = -e^{-\theta} = -r$ だから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} e^{-\theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} (1 - e^{-\pi/2}). \end{aligned}$$

(2) 角度 $d\theta$ の細い扇形の面積は $(1/2)r^2 d\theta$ である。従って曲線と両座標軸で囲まれる面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2\theta} d\theta \\ &= \frac{1 - e^{-\pi}}{4}. \end{aligned}$$



【総評】 難度 6、計算量 5。対数らせんの速度では交差項が消え、面積では正弦・余弦の平方和にまとまる。曲線の進行方向と両軸で閉じる向きを確認し、符号が正になる面積公式を用いた。