

京都大学 1997 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

単位円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P をとり、定点 $A(-2, 0)$ から P へ線分を引き、その線分の P の側の延長線上に点 Q を $\overline{AP} \cdot \overline{PQ} = 3$ となるようにとる。ただし、 $\overline{AP}$ は線分 AP の長さを表す。

(1) $s = \overline{AP}$, $t = \overline{OQ}$ において、 t を s で表せ。ただし、 $O(0, 0)$ は原点である。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき、点 Q の描く軌跡を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず三角形 AOP で余弦定理を使い、 $s = AP$ から $\cos \angle OAP$ を表す。次に $PQ = 3/s$ より $AQ = s + 3/s$ であることを三角形 AOQ に入れると、 s を含む項が消えて $OQ = 2$ が出る。軌跡では、 Q が半径 2 の円上にあるだけでなく、直線 AQ が単位円と交わる方向に限られることを確認する。境界は点 A から単位円へ引いた 2 本の接線で決まり、対応する Q を求めて円弧の範囲を決める。

【解答】

(1) $\angle OAP = \theta$ とおく。 $AO = 2$, $OP = 1$, $AP = s$ であるから、三角形 AOP に余弦定理を用いて $1^2 = 2^2 + s^2 - 2 \cdot 2 \cdot s \cos \theta$ すなわち $\cos \theta = \frac{s^2 + 3}{4s}$ を得る。

条件 $AP \cdot PQ = 3$ より $PQ = \frac{3}{s}$ である。 Q は A, P を結ぶ直線上で P の外側にあるので $AQ = AP + PQ = s + \frac{3}{s}$ である。 $t = OQ$ として、三角形 AOQ に余弦定理を用いると

$$t^2 = 2^2 + \left(s + \frac{3}{s}\right)^2 - 2 \cdot 2 \left(s + \frac{3}{s}\right) \cos \theta$$

である。ここに $\cos \theta = (s^2 + 3)/(4s)$ を代入すると

$$\begin{aligned} t^2 &= 4 + \left(s + \frac{3}{s}\right)^2 - 4 \left(s + \frac{3}{s}\right) \frac{s^2 + 3}{4s} \\ &= 4 + \frac{(s^2 + 3)^2}{s^2} - \frac{(s^2 + 3)^2}{s^2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

したがって $t > 0$ より $t = 2$ である。

(2) (1) より、 Q は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にある。

ただし、円 $x^2 + y^2 = 4$ 全体が軌跡になるわけではない。点 Q から見れば、直線 AQ が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と交わり、その交点のうち A から見て Q 側にある点が P でなければならない。したがって、 A から単位円に引いた 2 本の接線が軌跡の境界になる。

接点を (u, v) とすると、接線は半径 $O(u, v)$ と直交するので $(u, v) \cdot (-2 - u, -v) = 0$ である。 $u^2 + v^2 = 1$ を用いると $-2u - 1 = 0$ すなわち $u = -\frac{1}{2}$, $v = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。この接線と円 $x^2 + y^2 = 4$ との、 A でない方の交点は $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ である。

また、 $P = (1, 0)$ のときは $Q = (2, 0)$ となり、右側の円弧が実際に通過される。よって求める軌跡は $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 1$ で表される円弧である。端点 $(1, \pm\sqrt{3})$ も、接線の場合として含まれる。

▶ 解法 2

【方針】

点 $P = (u, v)$ と置き、 $AP^2 = 5 + 4u$ を使って点 Q の位置ベクトルを直接表す。内積を展開すると $OQ^2 = 4$ が恒等的に得られる。軌跡の範囲は、点 A から単位円へ引く 2 接線の間にある方向として決め、逆にその円弧上の各点から P を復元できることも確認する。

【解答】

(1)

$$P = (u, v), \quad u^2 + v^2 = 1$$

と置く。このとき

$$s^2 = AP^2 = (u + 2)^2 + v^2 = 5 + 4u.$$

条件 $AP \cdot PQ = 3$ より、 Q は P から $\overrightarrow{AP}$ の向きへ長さ $3/s$ だけ進んだ点である。したがって

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{s^2} \overrightarrow{AP}.$$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 1 + 2u$ だから

$$\begin{aligned} OQ^2 &= 1 + \frac{6(1 + 2u)}{5 + 4u} + \frac{9}{5 + 4u} \\ &= 4. \end{aligned}$$

よって $t = OQ > 0$ から

$$t = 2.$$

(2) 上の計算から Q は円

$$x^2 + y^2 = 4$$

上にある。ただし、直線 AQ が単位円と交わる方向だけが許される。その境界は A から単位円への 2 本の接線である。

接点を $T = (\xi, \eta)$ とすると

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{AT} = 0.$$

したがって

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

この 2 接線が半径 2 の円と再び交わる点は

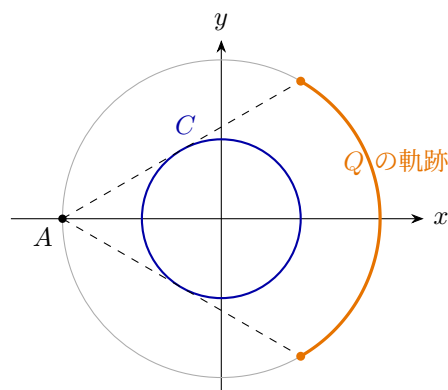
$$(1, \sqrt{3}), \quad (1, -\sqrt{3})$$

である。 $P = (1, 0)$ では $Q = (2, 0)$ となるので、通るのは右側の円弧である。

逆にこの円弧上の Q を取れば、半直線 AQ は単位円と交わる。その A から遠い方の交点を P とすると、上の恒等式を逆にたどって $AP \cdot PQ = 3$ が成り立つ。ゆえに軌跡は

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 1$$

であり、両端も含む。



【総評】 円外の点から単位円上の点へ線を伸ばす軌跡問題で、計算自体は標準だが、最後の範囲決定を落としやすい。目安時間は 18 分前後。(1) は余弦定理の代入で $(s^2 + 3)^2/s^2$ が消える構造をはっきり書くのが得点源である。(2) では $OQ = 2$ から円全体と即断せず、直線 AQ が単位円と交わる方向だけを残す。接線の接点を求める、または点から円を見込む角で考える、という境界確認が答案の締めになる。

【第 2 問】

n が相異なる素数 p, q の積, $n = pq$, であるとき, $(n - 1)$ 個の数 ${}_nC_k$ ($1 \leq k \leq n - 1$) の最大公約数は 1 であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

全ての二項係数の最大公約数を D とすると、まず ${}_nC_1 = n = pq$ より D は pq の約数である。したがって $D = 1$ を示すには、 D が p でも q でも割り切れないことを示せばよい。 p を消すには ${}_pC_p$ を見て、分子の p 個の連続因子の中で p の倍数が最初の pq だけであることを数える。同様に ${}_pC_q$ を使って q も排除する。

【解答】

求める最大公約数を D とする。すべての ${}_nC_k$ の中に ${}_nC_1 = n = pq$ が含まれるので、 D は pq の約数である。したがって、 D が p でも q でも割り切れないことを示せば、 $D = 1$ が従う。

まず p について調べる。 ${}_pC_p = \frac{pq(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-p+1)}{p!}$ である。分子に現れる p 個の整数 $pq, pq-1, pq-2, \dots, pq-p+1$ のうち、 p で割り切れるものは pq だけである。分母 $p!$ にも p はちょうど 1 回だけ含まれる。したがって、分子と分母に含まれる p の因子はちょうど打ち消し合い、 ${}_pC_p$ は p で割り切れない。

よって、すべての二項係数の公約数である D も p では割り切れない。

同様に ${}_pC_q = \frac{pq(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-q+1)}{q!}$ を考えると、分子の q 個の連続因子の中で q の倍数は pq だけであり、分母 $q!$ に含まれる q とちょうど打ち消し合う。したがって ${}_pC_q$ は q で割り切れない。ゆえに D も q で割り切れない。 D は pq の約数であり、しかも p でも q でも割り切れない。したがって $D = 1$ である。

▶ 解法 2

【方針】

解法 1 の素因数の個数の議論を合同式に置き換える。 ${}_pC_p$ を q と $p-1$ 個の比の積に分け、各因子を p を法として簡約する。結果が 0 でないことから最大公約数に p が入らないと示し、 p, q を交換して q も排除する。

【解答】

最大公約数を D とする。

$${}_pC_1 = pq$$

だから $D \mid pq$ である。

p を法として ${}_pC_p$ を調べる。

$${}_pC_p = q \cdot \frac{(pq-1)(pq-2)\cdots(pq-p+1)}{(p-1)!}.$$

$1, \dots, p-1$ はすべて p を法として逆数を持ち、

$$pq - i \equiv -i \pmod{p}.$$

従って

$${}_pC_p \equiv q(-1)^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

最後の不等号は $p \neq q$ がともに素数であることによる。よって ${}_pC_p$ は p で割り切れず、すべての二項係数の公約数 D も p では割り切れない。

同様に p, q を交換すると

$${}_pC_q \equiv p(-1)^{q-1} \not\equiv 0 \pmod{q}$$

だから、 D は q でも割り切れない。

D は pq の約数であり、その素因数 p, q のどちらも持たない。従って

$$D = 1.$$

【総評】 二項係数全体の最大公約数を、特定の 2 つの二項係数で素因数ごとに排除する問題である。難度は標準上位、目安時間は 18 分前後。最初に ${}_nC_1 = pq$ を見て最大公約数の候補を $1, p, q, pq$ に絞ると、証明の目的が明確になる。 ${}_{pq}C_p$ では「分子の中で p の倍数が何個あるか」を数えるだけでよいが、分母の $p!$ と打ち消した後に p が残らないことまで書くと答案として堅い。

【第 3 問】

2 つの放物線 $y = x^2 + 1$ と $y = kx^2$ ($k > 1$) で囲まれた部分の面積が第 1 の放物線上の点 $P(a, a^2 + 1)$ における接線 L によって 2 等分されている (すなわち、 L の上側にある部分の面積と下側にある部分の面積が等しい)。

(1) a^2 を k で表せ。

(2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^2$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$h = k - 1$ とおくと、2 つの放物線で囲まれる部分は $y = x^2 + 1$ と $y = x^2 + 1 - hx^2$ の差 $1 - hx^2$ で表される。まず全体の面積を求める。接線は上側の放物線の接線なので、接線と下側の放物線 $y = kx^2$ との間の面積が、接線の下側にある部分の面積になる。この差を平方完成し、正になる区間で積分すると $D = k - a^2(k - 1)$ の $3/2$ 乗で表せる。これを全表面積の半分に等置して a^2 を解き、最後に $k \rightarrow \infty$ の極限を取る。

【解答】

(1) $h = k - 1$ とおく。2 つの放物線の交点は $x^2 + 1 = kx^2$ より $1 = hx^2$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{h}}$ である。囲まれた部分の面積を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \int_{-1/\sqrt{h}}^{1/\sqrt{h}} \{(x^2 + 1) - kx^2\} dx \\ &= \int_{-1/\sqrt{h}}^{1/\sqrt{h}} (1 - hx^2) dx \\ &= 2 \left[x - \frac{h}{3} x^3 \right]_0^{1/\sqrt{h}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{h}} = \frac{4}{3\sqrt{k-1}}. \end{aligned}$$

点 $P(a, a^2 + 1)$ における放物線 $y = x^2 + 1$ の接線は $y = 2ax - a^2 + 1$ である。この接線と下側の放物線 $y = kx^2$ との差は $(2ax - a^2 + 1) - kx^2 = -kx^2 + 2ax - a^2 + 1$ である。平方完成すると

$$-k \left(x - \frac{a}{k} \right)^2 + 1 - a^2 + \frac{a^2}{k} = \frac{k - a^2(k - 1)}{k} - k \left(x - \frac{a}{k} \right)^2$$

である。

ここで $D = k - a^2(k - 1)$ とおく。接線と下側の放物線の間の面積は、上の式が正である範囲で

$$\int \left\{ \frac{D}{k} - k \left(x - \frac{a}{k} \right)^2 \right\} dx$$

を計算すればよい。正である範囲は $\left|x - \frac{a}{k}\right| < \frac{\sqrt{D}}{k}$ なので

$$\begin{aligned} \text{接線の下側の面積} &= \int_{-\sqrt{D}/k}^{\sqrt{D}/k} \left(\frac{D}{k} - ku^2 \right) du \\ &= 2 \left[\frac{D}{k}u - \frac{k}{3}u^3 \right]_0^{\sqrt{D}/k} \\ &= \frac{4D^{3/2}}{3k^2}. \end{aligned}$$

接線が面積を 2 等分するので、この面積は $T/2$ に等しい。したがって $\frac{4D^{3/2}}{3k^2} = \frac{2}{3\sqrt{k-1}}$ である。これより $D^{3/2} = \frac{k^2}{2\sqrt{k-1}}$ となり、両辺を $2/3$ 乗して $D = k\sqrt[3]{\frac{k}{4(k-1)}}$ を得る。 $D = k - a^2(k-1)$ であるから

$$a^2 = \frac{k-D}{k-1} = \frac{k}{k-1} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{k}{4(k-1)}} \right)$$

である。なお、実際にこのような接線が存在する場合には右辺は $a^2 \geq 0$ を満たす。

(2) (1) の式で $k \rightarrow \infty$ とすると $\frac{k}{k-1} \rightarrow 1$, $\frac{k}{4(k-1)} \rightarrow \frac{1}{4}$ である。したがって

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

放物線で切り取られる部分の面積公式を使う。差が $H - c(x - x_0)^2$ の形なら、半幅 $w = \sqrt{H/c}$ で囲まれる面積は $4Hw/3$ である。全体のレンズと接線下の部分にこの公式をそれぞれ適用し、面積比 1:2 から a^2 を求める。

【解答】

次の面積公式を使う。

$$H - c(x - x_0)^2 \geq 0$$

で切り取られる放物線部分は、半幅 $w = \sqrt{H/c}$ を用いて

$$\text{面積} = \frac{4}{3}Hw. \quad (1)$$

これは $x - x_0 = wu$ と置けば

$$Hw \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \frac{4}{3}Hw$$

から得られる。

(1) 2 放物線の差は

$$1 - (k-1)x^2.$$

(1) で $H = 1$, $w = 1/\sqrt{k-1}$ とすれば、全体の面積は

$$T = \frac{4}{3\sqrt{k-1}}.$$

点 $P(a, a^2 + 1)$ での接線は

$$y = 2ax - a^2 + 1.$$

この直線と $y = kx^2$ の差を平方完成し、

$$D = k - a^2(k-1)$$

と置くと

$$\frac{D}{k} - k \left(x - \frac{a}{k} \right)^2.$$

従って $H = D/k$, $w = \sqrt{D}/k$ であり、接線より下にある部分の面積は

$$\frac{4D^{3/2}}{3k^2}.$$

これが $T/2$ に等しいから

$$\frac{4D^{3/2}}{3k^2} = \frac{2}{3\sqrt{k-1}}.$$

よって

$$D = k \sqrt[3]{\frac{k}{4(k-1)}}.$$

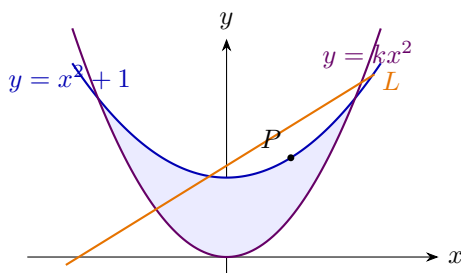
$D = k - a^2(k-1)$ へ戻して

$$a^2 = \frac{k}{k-1} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{k}{4(k-1)}} \right).$$

右辺が非負となるのは $k \geq 4/3$ であり、問題の接線が存在する場合はこの条件を満たす。

(2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$



【総評】 放物線間の面積を接線で二等分する計算量の重い問題である。難度は高く、目安時間は 30 分前後。全体面積、接線、接線と下側放物線の差、平方完成、面積半分の方程式という順に書くと崩れにくい。特に接線は上側放物線の下にあるので、接線より下側の部分は「接線と $y = kx^2$ の間」であることを図で確認してから積分するとよい。 $D = k - a^2(k-1)$ を置くと式が短くなり、 $3/2$ 乗を解く場面でミスが減らせる。

【第 4 問】

(1) $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ であるとき、次の不等式を示せ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x dx > (\beta - \alpha)(\sin \alpha + \sin(\pi - \beta))$$

(2)

$$\sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$$

を示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は、 $\sin(\pi - x) = \sin x$ により左辺を

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx$$

へ直し、区間の中点 m を中心に対称な 2 点の正弦和を比較する。 $x = m + u$ と $m - u$ を組にすると、 $\sin(m + u) + \sin(m - u) = 2 \sin m \cos u$ であり、端点より内部の方が $\cos u$ が大きいことから厳密な不等式が出る。(2) では幅 $h = \pi/8$ の区間 $[0, h], [h, 2h], [2h, 3h], [3h, 4h]$ に (1) を適用し、対称な積分区間が $[0, \pi]$ 全体を覆うことを使って三角和を上から押さえる。

【解答】

(1) まず

$$\int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx$$

である。実際、 $u = \pi - x$ と置けば $\sin x = \sin u$ であり、積分区間が $[\alpha, \beta]$ に移る。

したがって、示すべき不等式は

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx > (\beta - \alpha)(\sin \alpha + \sin \beta)$$

と同じである。

ここで $m = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $d = \frac{\beta - \alpha}{2}$ とおく。 $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$ より $0 < d \leq \pi/4$ である。 $x = m + u$ とすると

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx = \int_{-d}^d \{\sin(m + u) + \sin(m - u)\} du$$

である。加法定理より $\sin(m + u) + \sin(m - u) = 2 \sin m \cos u$ であり、また端点では $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(m - d) + \sin(m + d) = 2 \sin m \cos d$ である。 $-d < u < d$ では $\cos u > \cos d$ であり、 $m > 0$ なので $\sin m > 0$ である。よって $\sin(m + u) + \sin(m - u) > \sin \alpha + \sin \beta$ が区間内部で成り立つ。これを $-d \leq u \leq d$ で積分して

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx > (2d)(\sin \alpha + \sin \beta) = (\beta - \alpha)(\sin \alpha + \sin \beta)$$

を得る。 $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$ なので、これは求める不等式である。

(2) $h = \frac{\pi}{8}$ とおく。(1) を $[\alpha, \beta] = [(j-1)h, jh]$ ($j = 1, 2, 3, 4$) に適用する。4 つの不等式の左辺を足すと

$$\int_0^{4h} \sin x dx + \int_{\pi-h}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi-2h}^{\pi-h} \sin x dx + \int_{\pi-3h}^{\pi-2h} \sin x dx + \int_{\pi-4h}^{\pi-3h} \sin x dx$$

となる。これは

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

に等しい。

一方、右辺を足すと

$$\begin{aligned} & h\{\sin 0 + \sin h + \sin h + \sin 2h + \sin 2h + \sin 3h + \sin 3h + \sin 4h\} \\ & = h\{2\sin h + 2\sin 2h + 2\sin 3h + \sin 4h\}. \end{aligned}$$

ここで $h = \pi/8$ だから $\sin 5h = \sin 3h$, $\sin 6h = \sin 2h$, $\sin 7h = \sin h$ である。したがって

$$2\sin h + 2\sin 2h + 2\sin 3h + \sin 4h = \sum_{k=1}^7 \sin kh$$

である。

(1) の不等式はすべて厳密なので、足し合わせて

$$2 > h \sum_{k=1}^7 \sin kh = \frac{\pi}{8} \sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8}$$

を得る。ゆえに

$$\sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

関数 $f(x) = \sin x$ が $0 < x < \pi$ で狭義に上に凸であることを $f''(x) < 0$ から使う。曲線は弦より上にあるので、定積分は台形の面積より大きい。これを区間 $[\alpha, \beta]$ と対称区間へ適用して (1) を得て、幅 $\pi/8$ の 4 区間について足し合わせる。

【解答】

(1)

$$f(x) = \sin x$$

とすると

$$f''(x) = -\sin x < 0 \quad (0 < x < \pi).$$

従って正弦曲線はこの区間で狭義に上に凸であり、 $\alpha < x < \beta$ では曲線が両端を結ぶ弦より上にある。よって

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \, dx > (\beta - \alpha) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}.$$

$\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$ であり、対称な 2 積分は等しいから、両辺を 2 倍して

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \, dx + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x \, dx > (\beta - \alpha) \{\sin \alpha + \sin(\pi - \beta)\}.$$

(2)

$$h = \frac{\pi}{8}$$

とし、(1) を

$$[(j-1)h, jh] \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

へ適用して足す。左辺の積分区間は $[0, \pi]$ を重複なく覆うので

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2.$$

右辺は対称性により

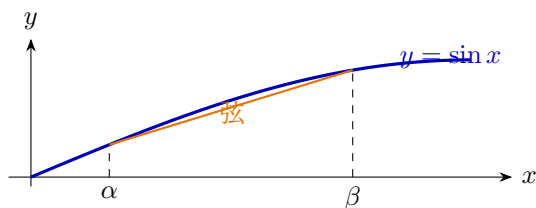
$$h \sum_{k=1}^7 \sin(kh)$$

となる。すべて厳密な不等号だから

$$2 > \frac{\pi}{8} \sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8}.$$

従って

$$\sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}.$$



【総評】 積分不等式を三角和の評価に転用する誘導問題である。難度は標準上位、目安時間は 20 分前後。(1) では単に「 $\sin x$ は上に凸」と言うだけで済ませず、対称な 2 点の和を $2 \sin m \cos u$ と表すと厳密な不等号を出しやすい。(2) では 4 つの区間に適用した左辺が $[0, \pi]$ をちょうど覆うこと、右辺が

$$\sum_{k=1}^7 \sin(k\pi/8)$$

にまとまることを丁寧に確認するのが得点の中心である。

【第 5 問】

箱の中に 1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードが合計 N 枚入れている。1 回の試行で、箱の中からでたらめに 1 枚のカードを取り出し、その数字を見た上で、箱の中に戻す。

A, B 2 人がそれぞれ試行を 2 回または 3 回行って、その間に取り出したカードに書かれている数の合計が大きい方を勝ちとするゲームを行う。ただし、1 人が 3 回の試行を行って、取り出した数の合計が 7 または 9 の場合には、その人の得点は 0 とする規則である。

そこで A, B はそれぞれ次の作戦でゲームを行うことにした。

A: 2 回目までの合計が 2 のときは 3 回目を行い、4 または 6 のときは 3 回目を行わない。

B: 2 回目までの合計が 2 または 4 のときは 3 回目を行い、6 のときは 3 回目を行わない。

1 と書かれたカードの枚数を n ($0 < n < N$) とし、 $p = \frac{n}{N}$ とする。

(1) A の得点の期待値 E_A , B の得点の期待値 E_B をそれぞれ p で表せ。また、 $E_A > E_B$ となるための p の条件を求めよ。

(2) A の勝つ確率を P_A , B の勝つ確率を P_B とするとき、「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」といえるか？

▶ 解法 1

【方針】

1 が出る確率を p , 3 が出る確率を $q = 1 - p$ とおく。まず A と B それぞれについて、2 回目までの和ごとの行動を分け、最終得点の確率分布を表にする。期待値はその表から直接計算し、 $E_A - E_B$ を因数分解して条件を出す。(2) では期待値ではなく勝つ確率を比較するので、同じ分布表から $P_A - P_B$ を独立な 2 人の得点の大小比較として計算する。 $E_A > E_B$ を満たすが $P_A < P_B$ となる p を 1 つ示せば、命題は否定できる。

【解答】

(1) 3 が出る確率を $q = 1 - p$ とおく。

A は、2 回目までの合計が 2 のときだけ 3 回目を行う。したがって A の得点分布は次のようになる。

得点	3	4	5	6
確率	p^3	$2pq$	p^2q	q^2

実際、最初の 2 回が 1, 1 なら 3 回目を行い、3 回目が 1 なら得点 3、3 なら得点 5 である。最初の 2 回の和が 4 または 6 ならそこで止まる。

よって

$$\begin{aligned} E_A &= 3p^3 + 4 \cdot 2pq + 5p^2q + 6q^2 \\ &= -2p^3 + 3p^2 - 4p + 6 \end{aligned}$$

である。

B は、2 回目までの合計が 2 または 4 のとき 3 回目を行う。ただし 3 回行って合計が 7 または 9 なら得点は 0 である。B の得点分布は

得点	0	3	5	6
確率	$2pq^2$	p^3	$3p^2q$	q^2

である。ここで得点 0 は、最初の 2 回が 1, 3 または 3, 1、3 回目が 3 の場合である。

したがって

$$\begin{aligned} E_B &= 3p^3 + 5 \cdot 3p^2q + 6q^2 \\ &= -12p^3 + 21p^2 - 12p + 6 \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} E_A - E_B &= 10p^3 - 18p^2 + 8p \\ &= 2p(1-p)(4-5p) \end{aligned}$$

となる。 $0 < p < 1$ より $2p(1-p) > 0$ だから $E_A > E_B$ となる条件は $0 < p < \frac{4}{5}$ である。

(2) A と B の得点は独立であり、上の分布表から勝率を比較できる。A の得点が B の得点より大きい場合を足し、B の得点が A の得点より大きい場合を引くと

$$\begin{aligned} P_A - P_B &= p^3(2pq^2) + 2pq(2pq^2 + p^3) + p^2q(2pq^2 + p^3) \\ &\quad + q^2(2pq^2 + p^3 + 3p^2q) \\ &\quad - 3p^2q(p^3 + 2pq) - q^2(p^3 + 2pq + p^2q). \end{aligned}$$

これを $q = 1 - p$ で整理すると $P_A - P_B = 2p^2(1-p)^2(p^2 - 4p + 2)$ である。

ここで $p = \frac{3}{4}$ とする。このとき $0 < p < 4/5$ なので、(1) より $E_A > E_B$ である。一方、 $p^2 - 4p + 2 = \frac{9}{16} - 3 + 2 = -\frac{7}{16} < 0$ であるから $P_A - P_B < 0$ すなわち $P_A < P_B$ である。

したがって $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ とはいえない。

▶ 解法 2

【方針】

A・B の得点分布を確率母関数として一つの式にまとめる。期待値は形式的に微分して $z = 1$ を代入し、勝率差は 2 つの分布の係数を得点順に並べた大小比較表で計算する。作戦ごとの経路を逐一文章で追う解法 1 とは別に、分布を代数的な対象として処理する。

【解答】

3 が出る確率を $q = 1 - p$ とする。得点 r の確率を z^r の係数にした式を作ると、A と B について

$$\begin{aligned} F_A(z) &= p^3z^3 + 2pqz^4 + p^2qz^5 + q^2z^6, \\ F_B(z) &= 2pq^2 + p^3z^3 + 3p^2qz^5 + q^2z^6. \end{aligned}$$

各係数の和は 1 であり、これが得点分布を表す。

(1) 期待値は

$$E_A = F'_A(1), \quad E_B = F'_B(1)$$

だから

$$\begin{aligned} E_A &= -2p^3 + 3p^2 - 4p + 6, \\ E_B &= -12p^3 + 21p^2 - 12p + 6. \end{aligned}$$

従って

$$E_A - E_B = 2p(1-p)(4-5p).$$

$0 < p < 1$ より

$$E_A > E_B \iff 0 < p < \frac{4}{5}.$$

(2) 勝率差は、A の各得点について「それより小さい B の確率」から「それより大きい B の確率」を引いて重み付けすればよい。得点順に係数を代入して整理すると

$$P_A - P_B = 2p^2(1-p)^2(p^2 - 4p + 2).$$

ここで

$$p = \frac{3}{4}$$

を取ると $E_A > E_B$ である一方、

$$p^2 - 4p + 2 = -\frac{7}{16} < 0$$

なので $P_A < P_B$ である。従って

「 $E_A > E_B$ ならば $P_A > P_B$ 」とはいえない。

【総評】 期待値の大小と勝率の大小が一致しないことを、分布表から実際に示す確率問題である。難度は高く、目安時間は 30 分前後。まず各作戦の「3 回目を引く条件」と「3 回引いたときの 0 点規則」を混同せず、得点分布を正しく作ることが最重要である。(2) では期待値の式を流用できないので、独立な 2 人の得点の大小比較を改めて行う必要がある。反例は $p = 3/4$ のように $E_A > E_B$ の範囲内で勝率差が負になる値を選べば十分である。

【第 6 問】

曲線 $y = \cos x$ の $x = t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) における接線と x 軸、 y 軸の囲む 3 角形の面積を $S(t)$ とする。

- (1) t の関数として、 $S(t)$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) を求めよ。
- (2) $S(t)$ はある 1 点 $t = t_0$ で最小値をとることを示せ。また、 $\frac{\pi}{4} < t_0 < 1$ を示せ。
- (3) $S(t_0) = 2t_0 \cos t_0$ を示せ。また、 $S(t_0) > \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ を示せ。

▶ 解法 1

【方針】

接線の方程式を出し、 x 軸・ y 軸との切片から三角形の面積 $S(t)$ を表す。微分では、 $B = \cos t + t \sin t$ とおくと式が短くなり、 $S'(t)$ の符号が $t \sin t - \cos t$ 、すなわち $t \tan t - 1$ の符号に一致することを示す。 $t \tan t$ が $(0, \pi/2)$ で単調増加し、0 から無限大へ動くため、最小点 t_0 はただ 1 つ存在する。範囲 $\pi/4 < t_0 < 1$ は $t \tan t$ を両端で評価する。最後は最小条件 $t_0 \tan t_0 = 1$ を使って $S(t_0)$ を簡単にし、 $t \cos t$ の単調性から下界を示す。

【解答】

(1) 曲線 $y = \cos x$ の $x = t$ における接線は $y - \cos t = -\sin t(x - t)$ である。すなわち $y = -x \sin t + \cos t + t \sin t$ である。 $0 < t < \pi/2$ では $\sin t > 0$, $\cos t > 0$ である。この接線の y 軸との交点の y 座標は $\cos t + t \sin t$ であり、 x 軸との交点は $0 = -x \sin t + \cos t + t \sin t$ より $x = t + \cot t$ である。したがって、囲まれる三角形の面積は $S(t) = \frac{1}{2}(t + \cot t)(\cos t + t \sin t)$ である。 $t + \cot t = (\cos t + t \sin t) / \sin t$ なので $S(t) = \frac{(\cos t + t \sin t)^2}{2 \sin t}$ とも書ける。

(2) $B = \cos t + t \sin t$ とおくと $S(t) = \frac{B^2}{2 \sin t}$, $B' = t \cos t$ である。微分すると

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{2BB' \cdot 2 \sin t - B^2 \cdot 2 \cos t}{(2 \sin t)^2} \\ &= \frac{B\{2t \cos t \sin t - B \cos t\}}{2 \sin^2 t} \\ &= \frac{B \cos t\{2t \sin t - (\cos t + t \sin t)\}}{2 \sin^2 t} \\ &= \frac{B \cos t(t \sin t - \cos t)}{2 \sin^2 t}. \end{aligned}$$

ここで $B > 0$, $\cos t > 0$, $\sin t > 0$ なので、 $S'(t)$ の符号は $t \sin t - \cos t$ の符号と一致する。すなわち、 $S'(t)$ の符号は $t \tan t - 1$ の符号と一致する。

関数 $t \tan t$ は $(0, \pi/2)$ で単調増加する。実際、微分すると $(t \tan t)' = \tan t + \frac{t}{\cos^2 t} > 0$ である。また

$$\lim_{t \rightarrow +0} t \tan t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \pi/2-0} t \tan t = +\infty$$

である。したがって $t \tan t = 1$ を満たす t_0 がただ 1 つ存在する。 $0 < t < t_0$ では $t \tan t < 1$ なので $S'(t) < 0$ 、 $t_0 < t < \pi/2$ では $t \tan t > 1$ なので $S'(t) > 0$ である。よって $S(t)$ は $t = t_0$ でただ 1 つの最小値をとる。

さらに $\frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < 1$ であるから、単調性より $\frac{\pi}{4} < t_0$ である。また $1 > \pi/4$ なので $\tan 1 > \tan(\pi/4) = 1$ であり $1 \cdot \tan 1 > 1$ である。したがって $t_0 < 1$ である。以上より $\frac{\pi}{4} < t_0 < 1$ である。

(3) 最小条件より $t_0 \tan t_0 = 1$ である。したがって $t_0 \sin t_0 = \cos t_0$ である。これを $S(t)$ の式に代入すると $\cos t_0 + t_0 \sin t_0 = 2 \cos t_0$ なので $S(t_0) = \frac{(2 \cos t_0)^2}{2 \sin t_0} = \frac{2 \cos^2 t_0}{\sin t_0}$ 。また $t_0 \sin t_0 = \cos t_0$ より $\cos t_0 / \sin t_0 = t_0$ であるから $S(t_0) = 2t_0 \cos t_0$ である。

次に $S(t_0) > \sqrt{2}\pi/4$ を示す。関数 $t \cos t$ を微分すると $(t \cos t)' = \cos t - t \sin t = \cos t(1 - t \tan t)$ である。 $0 < t < t_0$ では $t \tan t < 1$ だから $(t \cos t)' > 0$ である。よって $t \cos t$ は $(0, t_0)$ で増加する。すでに $\pi/4 < t_0$ を示したので $t_0 \cos t_0 > \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ である。したがって $S(t_0) = 2t_0 \cos t_0 > \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ が成り立つ。

▶ 解法 2

【方針】

接線の 2 切片を直接微分する。 x 切片を $X = t + \cot t$ 、 y 切片を $Y = \cos t + t \sin t$ とすると $Y = X \sin t$ で、 $S = XY/2$ である。対数微分により符号を短く $t \tan t - 1$ へ落とし、唯一の零点と最小値を示す。最後は同じ零点条件を使って値と下界を求める。

【解答】

(1) 接線は

$$y = -x \sin t + \cos t + t \sin t.$$

x 切片と y 切片を

$$X = t + \cot t, \quad Y = \cos t + t \sin t$$

とすると $Y = X \sin t$ である。従って

$$S(t) = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2} \sin t (t + \cot t)^2.$$

(2) $S(t) > 0$ なので対数微分する。

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \cot t + 2 \frac{1 - \csc^2 t}{t + \cot t}.$$

整理すると、この符号は

$$t \tan t - 1$$

の符号と一致する。関数 $t \tan t$ は

$$(t \tan t)' = \tan t + \frac{t}{\cos^2 t} > 0$$

で、 $t \rightarrow 0+0$ では 0、 $t \rightarrow \pi/2-0$ では正の無限大へ近づく。従って

$$t_0 \tan t_0 = 1$$

を満たす点 t_0 がただ 1 つあり、そこで S は減少から増加へ変わる。

$$\frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} < 1, \quad 1 \cdot \tan 1 > 1$$

だから

$$\frac{\pi}{4} < t_0 < 1.$$

(3) $t_0 \sin t_0 = \cos t_0$ より

$$S(t_0) = 2t_0 \cos t_0.$$

また

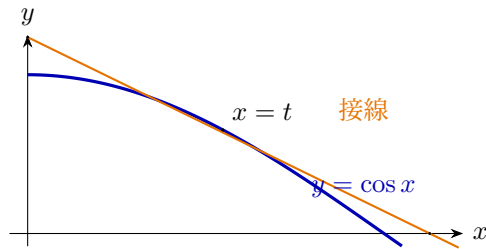
$$(t \cos t)' = \cos t(1 - t \tan t) > 0 \quad (0 < t < t_0).$$

$\pi/4 < t_0$ だから

$$t_0 \cos t_0 > \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

従って

$$S(t_0) > \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$



【総評】 接線の切片から面積を作り、微分で最小値を調べる標準的な流れに、最後の評価が加わった問題である。難度は高め、目安時間は 25 分前後。(1) では切片の符号が正であることを確認し、面積式を $(\cos t + t \sin t)^2 / (2 \sin t)$ まで整理しておくと後が楽になる。(2) の山場は、 $S'(t)$ の符号を $t \tan t - 1$ に落とす計算である。(3) では最小条件を単に代入するだけでなく、 $t \cos t$ の増加を使って下界を作る点が答案の仕上げになる。