

入 学 試 験 問 題



数 学

京 都 大 学 1998 年 度 文 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

α を 0 でない複素数とする. $\beta^2 = \alpha$ となるような複素数 β がちょうど 2 個存在することを示せ.

第 2 問

xy 平面上に放物線 $y = x^2$ と点 $B(0, b)$ を考える. ただし $b > 0$ とする.

- (1) 点 $X(t, t^2)$ がこの放物線上を動くとき, 線分 BX の長さの最小値を求めよ.
- (2) (1) で求めた最小値が 1 となるように b をとる. このとき点 $B(0, b)$ を中心とする半径 1 の円と放物線 $y = x^2$ とは相異なる 2 点 P, Q でそれぞれ共通の接線を持つことを示し, 角 PBQ の大きさ (ただし $0^\circ < \angle PBQ < 180^\circ$ とする) を求めよ. さらに角 PBQ に対応する円弧 PQ と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ.

第 3 問

関数 $f_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ は, $f_1(x) = 4x^2 + 1$

$$f_n(x) = 3x^2 \int_0^1 t f_{n-1}'(t) dt + 3 \int_0^1 f_{n-1}(t) dt, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で帰納的に定義されている. この $f_n(x)$ を求めよ.

第 4 問

θ が $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき，次の問に答えよ．

- (1) 不等式 $2 \sin 3\theta - 2 \cos 2\theta - 1 > 0$ を満たす θ の範囲を求めよ．
- (2) 定数 a がいろいろな値を取るとき，方程式 $2 \sin 3\theta - 2 \cos 2\theta - 1 = a$ の解の個数がどのように変わるかを調べよ．

第 5 問

a, b, p, q はすべて自然数で, $\frac{p^2 + q^2}{a} = \frac{pq}{b}$ を満たしている. a と b の最大公約数が 1 のとき以下の問に答えよ.

- (1) pq は b で割り切れることを示せ.
- (2) $\sqrt{a + 2b}$ は自然数であることを示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)