

京都大学 1998 年度 文系 (後期)

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

α を 0 でない複素数とする. $\beta^2 = \alpha$ となるような複素数 β がちょうど 2 個存在することを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

α を極形式で表して平方根を 2 つ構成する. その後、任意の平方根と構成した 1 つとの差・和の積を用いて、それ以外に解がないことを示す.

【解答】

$\alpha \neq 0$ であるから、ある実数 θ を用いて

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r = |\alpha| > 0)$$

と書ける. そこで

$$\beta_0 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

とおくと、ド・モアブルの定理より

$$\beta_0^2 = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \alpha$$

である. また $(-\beta_0)^2 = \alpha$ でもある. $\beta_0 \neq 0$ なので、 β_0 と $-\beta_0$ は相異なる.

逆に、複素数 γ が $\gamma^2 = \alpha$ を満たすとする. このとき

$$\gamma^2 - \beta_0^2 = (\gamma - \beta_0)(\gamma + \beta_0) = 0$$

である. 複素数の積が 0 ならば少なくとも一方が 0 だから、 $\gamma = \beta_0$ または $\gamma = -\beta_0$ である.

従って、条件を満たす複素数は $\beta_0, -\beta_0$ のちょうど 2 個である.

▶ 解法 2

【方針】

$\alpha = u + vi$, $\beta = x + yi$ と実部・虚部に分ける. 絶対値から x^2, y^2 を一意に決め、積 $2xy = v$ が相対符号を決めることに
より、2 解が互いに符号を変えたものだけであると示す.

【解答】

$$\alpha = u + vi, \quad \beta = x + yi$$

とおく. $\beta^2 = \alpha$ は

$$x^2 - y^2 = u, \quad 2xy = v$$

と同値である. また絶対値を取れば

$$x^2 + y^2 = |\beta|^2 = |\alpha|.$$

従って

$$x^2 = \frac{|\alpha| + u}{2}, \quad y^2 = \frac{|\alpha| - u}{2}.$$

右辺はともに 0 以上であり、少なくとも一方は正である.

$v \neq 0$ のときは $x, y \neq 0$ で、上の 2 式が $|x|, |y|$ を決め、 $2xy = v$ が 2 数の相対符号を決める. 従って 1 組 (x_0, y_0) が決まれば、可能なのは

$$(x, y) = (x_0, y_0), \quad (-x_0, -y_0)$$

の 2 組だけである.

$v = 0$ のとき、 $\alpha \neq 0$ だから $u \neq 0$ である. $u > 0$ なら $y = 0$, $x = \pm\sqrt{u}$ 、 $u < 0$ なら $x = 0$, $y = \pm\sqrt{-u}$ であり、やはり 2 個である.

以上より、 $\beta^2 = \alpha$ の解は、ある 1 つの解 β_0 とその反数 $-\beta_0$ のちょうど 2 個である.

【総評】 難度 3、計算量 2。存在だけでなく「それ以外にない」ことまで示す必要がある。極形式で 2 解を作り、平方差の因数分解で一意性を閉じた。0 でないという仮定は 2 解が相異なることの保証に使われるため、答案中で明示することが重要である。

【第 2 問】

xy 平面上に放物線 $y = x^2$ と点 $B(0, b)$ を考える。ただし $b > 0$ とする。

- (1) 点 $X(t, t^2)$ がこの放物線上を動くとき、線分 BX の長さの最小値を求めよ。
- (2) (1) で求めた最小値が 1 となるように b をとる。このとき点 $B(0, b)$ を中心とする半径 1 の円と放物線 $y = x^2$ とは相異なる 2 点 P, Q でそれぞれ共通の接線を持つことを示し、角 PBQ の大きさ (ただし $0^\circ < \angle PBQ < 180^\circ$ とする) を求めよ。さらに角 PBQ に対応する円弧 PQ と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 距離の二乗を $u = t^2 \geq 0$ の二次式として最小化する。(2) 最小値 1 から b を決め、等号を与える 2 点を求める。半径と放物線の接線が直交することを確認し、中心角と円弧・放物線間の積分を計算する。

【解答】

(1) 距離の二乗は

$$BX^2 = t^2 + (t^2 - b)^2$$

である。 $u = t^2 \geq 0$ とおくと

$$BX^2 = u + (u - b)^2 = \left(u - b + \frac{1}{2}\right)^2 + b - \frac{1}{4}.$$

従って $0 < b \leq \frac{1}{2}$ では頂点 $u = b - \frac{1}{2}$ が範囲外なので $u = 0$ で最小となり、最小値は b である。 $b \geq \frac{1}{2}$ では $u = b - \frac{1}{2}$ で最小となり、最小値は $\sqrt{b - \frac{1}{4}}$ である。よって

$$\min BX = \begin{cases} b & \left(0 < b \leq \frac{1}{2}\right), \\ \sqrt{b - \frac{1}{4}} & \left(b \geq \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

(2) 最小値が 1 となるのは第 2 の場合で

$$b - \frac{1}{4} = 1, \quad b = \frac{5}{4}$$

のときである。等号条件 $t^2 = b - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ より

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right), \quad Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

を得る。放物線の点 (t, t^2) における接線の傾きは $2t$ である。一方、半径 $B(t, t^2)$ の傾きは

$$\frac{t^2 - \frac{5}{4}}{t} = \frac{-\frac{1}{2}}{t} = -\frac{1}{2t}$$

であるから、両者の傾きの積は -1 である。従って P, Q で円と放物線は共通の接線を持つ。

また

$$\overrightarrow{BP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{BQ} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

で、両ベクトルの長さは 1、内積は $-\frac{1}{2}$ である。従って

$$\cos \angle PBQ = -\frac{1}{2}, \quad \angle PBQ = 120^\circ.$$

対応する小さい方の円弧は円

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$$

の下側であり、

$$y = \frac{5}{4} - \sqrt{1 - x^2}$$

と表される。 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ でこの円弧は放物線の上にある。求める面積 S は

$$S = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{5}{4} - \sqrt{1 - x^2} - x^2 \right) dx.$$

ここで

$$\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}, \quad \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} x^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

だから

$$S = \frac{5\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}.$$

▶ 解法 2

【方針】

距離の二乗を t で直接微分して最小点を分類する。接点では半径と接線の直交を用い、囲まれた面積は円の扇形・三角形と放物線下の面積に分けて求める。

【解答】

(1)

$$D(t) = BX^2 = t^2 + (t^2 - b)^2$$

とおく。微分すると

$$D'(t) = 2t\{1 + 2(t^2 - b)\} = 2t(2t^2 - 2b + 1).$$

$0 < b \leq 1/2$ では $2t^2 - 2b + 1 \geq 0$ だから、最小は $t = 0$ で

$$\min BX = b.$$

$b > 1/2$ では $t = \pm\sqrt{b - 1/2}$ で最小となり、

$$\min BX = \sqrt{b - \frac{1}{4}}.$$

従って

$$\min BX = \begin{cases} b & (0 < b \leq 1/2), \\ \sqrt{b - 1/4} & (b \geq 1/2). \end{cases}$$

(2) 最小値が 1 となるのは

$$b = \frac{5}{4}$$

であり、接点は

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right), \quad Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

半径 BP, BQ と放物線の接線の傾きの積はいずれも -1 なので、円と放物線はこの 2 点で接する。

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{2}, \quad |BP| = |BQ| = 1$$

より

$$\angle PBQ = 120^\circ.$$

円弧 PQ と弦 PQ の間の円弓形は、半径 1、中心角 $2\pi/3$ の扇形から三角形 BPQ を引いたものなので

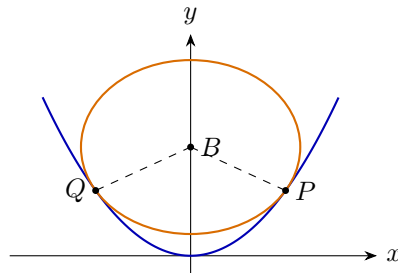
$$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

一方、弦 $y = 3/4$ と放物線で囲まれる面積は

$$\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{3}{4} - x^2 \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

求める領域は後者から円弓形を引いたものだから

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}.$$



【総評】 難度 7、計算量 6。距離では変数の平方を独立変数にすると場合分けが明確になる。接すること、中心角、面積の 3 点をすべて検証した。面積では円弧の上下を取り違いやすいため、中央の点で放物線との位置関係も確認している。

【第 3 問】

関数 $f_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ は, $f_1(x) = 4x^2 + 1$

$$f_n(x) = 3x^2 \int_0^1 t f_{n-1}'(t) dt + 3 \int_0^1 f_{n-1}(t) dt, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で帰納的に定義されている。この $f_n(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各 f_n が二次式 $A_n x^2 + B_n$ になることを帰納的に確認し、係数の漸化式を解く。

【解答】

$f_{n-1}(x) = A_{n-1} x^2 + B_{n-1}$ と書けるとする。このとき

$$\int_0^1 t f_{n-1}'(t) dt = \int_0^1 2A_{n-1} t^2 dt = \frac{2A_{n-1}}{3}$$

であり、

$$\int_0^1 f_{n-1}(t) dt = \frac{A_{n-1}}{3} + B_{n-1}.$$

従って

$$f_n(x) = 2A_{n-1} x^2 + A_{n-1} + 3B_{n-1}.$$

$f_1(x) = 4x^2 + 1$ もこの形なので、帰納的にすべての f_n は二次式であり、

$$A_n = 2A_{n-1}, \quad B_n = A_{n-1} + 3B_{n-1}, \quad A_1 = 4, \quad B_1 = 1$$

を満たす。

第 1 式から $A_n = 2^{n+1}$ である。従って

$$B_n = 2^n + 3B_{n-1}.$$

ここで $C_n = B_n + 2^{n+1}$ とおくと

$$C_n = 3B_{n-1} + 2^n + 2^{n+1} = 3(B_{n-1} + 2^n) = 3C_{n-1}.$$

$C_1 = 1 + 4 = 5$ だから $C_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ であり、

$$B_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}.$$

従って

$$f_n(x) = 2^{n+1}x^2 + 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

▶ 解法 2

【方針】

得られる閉じた式を先に予想し、定義式へ代入する数学的帰納法で直接証明する。係数漸化式を解かず、2 つの定積分だけを計算して次の添字の式を再現する。

【解答】

次の式を数学的帰納法で直接示す。

$$f_n(x) = 2^{n+1}(x^2 - 1) + 5 \cdot 3^{n-1}.$$

$n = 1$ では右辺は

$$4(x^2 - 1) + 5 = 4x^2 + 1 = f_1(x)$$

である。

$n - 1$ で成り立つと仮定する。このとき

$$f_{n-1}(t) = 2^n(t^2 - 1) + 5 \cdot 3^{n-2}, \quad f'_{n-1}(t) = 2^{n+1}t.$$

従って

$$\int_0^1 t f'_{n-1}(t) dt = \frac{2^{n+1}}{3}$$

であり、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_{n-1}(t) dt &= 2^n \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + 5 \cdot 3^{n-2} \\ &= -\frac{2^{n+1}}{3} + 5 \cdot 3^{n-2}. \end{aligned}$$

定義式へ代入すると

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 3x^2 \cdot \frac{2^{n+1}}{3} + 3 \left(-\frac{2^{n+1}}{3} + 5 \cdot 3^{n-2} \right) \\ &= 2^{n+1}(x^2 - 1) + 5 \cdot 3^{n-1}. \end{aligned}$$

よってすべての自然数 n で

$$f_n(x) = 2^{n+1}x^2 + 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5。関数漸化式を係数の漸化式へ落とす問題である。初項への代入でも式が一致することを確認した。積分変数と関数の変数を区別し、定数項の非同次漸化式を補助数列で処理すると計算が安定する。

【第 4 問】

θ が $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、次の問に答えよ。

- (1) 不等式 $2 \sin 3\theta - 2 \cos 2\theta - 1 > 0$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (2) 定数 a がいろいろな値を取るとき、方程式 $2 \sin 3\theta - 2 \cos 2\theta - 1 = a$ の解の個数がどのように変わるかを調べよ。

▶ 解法 1

【方針】

$s = \sin \theta$ において三次関数 $F(s)$ に直す。(1) は因数分解して符号を調べる。(2) は $-1 \leq s \leq 1$ 上の増減と端点値・極値を求め、1 つの s が通常 2 つの θ に対応する点を数える。

【解答】

(1) $s = \sin \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} 2 \sin 3\theta - 2 \cos 2\theta - 1 &= 2(3s - 4s^3) - 2(1 - 2s^2) - 1 \\ &= -8s^3 + 4s^2 + 6s - 3 \\ &= (2s - 1)(3 - 4s^2). \end{aligned}$$

従ってこれが正となるのは

$$-1 \leq s < -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{または} \quad \frac{1}{2} < s < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

のときである。 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ に戻すと

$$30^\circ < \theta < 60^\circ, \quad 120^\circ < \theta < 150^\circ, \quad 240^\circ < \theta < 300^\circ.$$

(2)

$$F(s) = -8s^3 + 4s^2 + 6s - 3 \quad (-1 \leq s \leq 1)$$

とおく。

$$F'(s) = -24s^2 + 8s + 6$$

の零点は

$$u = \frac{1 - \sqrt{10}}{6}, \quad v = \frac{1 + \sqrt{10}}{6}$$

である。 F は $[-1, u]$ で減少、 $[u, v]$ で増加、 $[v, 1]$ で減少する。また

$$\begin{aligned} F(-1) &= 3, & F(1) &= -1, \\ F(u) = L &= -\frac{4(13 + 5\sqrt{10})}{27}, & F(v) = U &= \frac{4(5\sqrt{10} - 13)}{27}. \end{aligned}$$

ここで $L < -1 < U < 3$ である。

$s \in (-1, 1)$ の 1 つの解には $\sin \theta = s$ を満たす θ が 2 個対応し、 $s = \pm 1$ には 1 個だけ対応する。各単調区間と水平線 $y = a$ の交点を数えると、方程式の解の個数は

a の範囲	θ の解の個数
$a < L$ または $a > 3$	0
$a = L$	2
$L < a < -1$	4
$a = -1$	5
$-1 < a < U$	6
$a = U$	4
$U < a < 3$	2
$a = 3$	1

となる。

▶ 解法 2

【方針】

式を $s = \sin \theta$ の三次関数へ直し、零点・端点・極値を同じグラフに配置する。水平線との交点数と、各 s に対応する角の個数を別々に数えて一覧表を作る。

【解答】

$$F(s) = -8s^3 + 4s^2 + 6s - 3, \quad -1 \leq s \leq 1$$

とおく。

(1)

$$F(s) = (2s - 1)(3 - 4s^2)$$

だから、符号表より

$$-1 \leq s < -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{または} \quad \frac{1}{2} < s < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$s = \sin \theta$ に戻して

$$30^\circ < \theta < 60^\circ, \quad 120^\circ < \theta < 150^\circ, \quad 240^\circ < \theta < 300^\circ.$$

(2)

$$F'(s) = -24s^2 + 8s + 6$$

の 2 根を

$$u = \frac{1 - \sqrt{10}}{6}, \quad v = \frac{1 + \sqrt{10}}{6}$$

とする。端点・極値は

$$F(-1) = 3, \quad F(1) = -1,$$

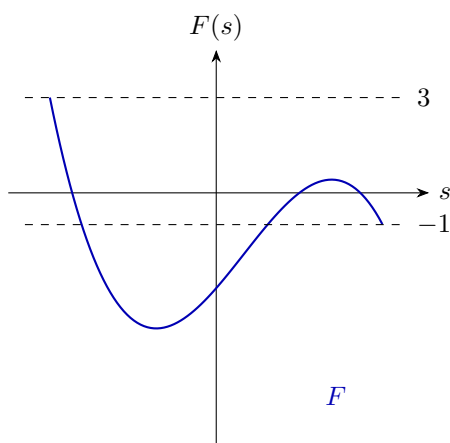
$$L = F(u) = -\frac{4(13 + 5\sqrt{10})}{27}, \quad U = F(v) = \frac{4(5\sqrt{10} - 13)}{27}$$

であり、 $L < -1 < U < 3$ である。

三次関数との交点 s が $(-1, 1)$ にあれば角は 2 個、 $s = \pm 1$ なら角は 1 個である。従って解の個数は

a の範囲	θ の個数
$a < L$ または $a > 3$	0
$a = L$	2
$L < a < -1$	4
$a = -1$	5
$-1 < a < U$	6
$a = U$	4
$U < a < 3$	2
$a = 3$	1

となる。



【総評】 難度 8、計算量 7。三次関数の交点数だけでなく、正弦の値が 1 または マイナス 1 のときは対応する角が 1 個しかないため、境界値で解の個数が変わる。極値を厳密値で算出し、水平線の位置を全区間に分けて漏れなく数えた。

【第 5 問】

a, b, p, q はすべて自然数で、 $\frac{p^2 + q^2}{a} = \frac{pq}{b}$ を満たしている。 a と b の最大公約数が 1 のとき以下の問に答えよ。

- (1) pq は b で割り切れることを示せ。
- (2) $\sqrt{a + 2b}$ は自然数であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 分母を払い、 $\gcd(a, b) = 1$ を用いる。(2) p, q の最大公約数をくくって互いに素な 2 数にし、比 $a : b$ を既約な比として同定する。

【解答】

(1) 分母を払うと

$$b(p^2 + q^2) = apq$$

である。従って $b \mid apq$ であり、 $\gcd(a, b) = 1$ だからユークリッドの補題により

$$b \mid pq$$

である。

(2) $d = \gcd(p, q)$ とし

$$p = dr, \quad q = ds, \quad \gcd(r, s) = 1$$

とおく。元の等式から

$$b(r^2 + s^2) = ars.$$

ここで $\gcd(rs, r^2 + s^2) = 1$ である。実際、素数 ℓ が両者を割るなら、 $\ell \mid r$ または $\ell \mid s$ である。例えば $\ell \mid r$ なら $\ell \mid r^2 + s^2$ より $\ell \mid s^2$ 、従って $\ell \mid s$ となり、 $\gcd(r, s) = 1$ に反する。

従って

$$\frac{a}{b} = \frac{r^2 + s^2}{rs}$$

は右辺も既約分数である。左辺も $\gcd(a, b) = 1$ により既約だから

$$a = r^2 + s^2, \quad b = rs.$$

よって

$$a + 2b = r^2 + 2rs + s^2 = (r + s)^2.$$

$r + s$ は自然数なので

$$\sqrt{a + 2b} = r + s$$

も自然数である。

▶ 解法 2

【方針】

p, q の最大公約数を除いた互いに素な 2 数について、積と平方和が互いに素であることを素因数ごとに示す。既約比の一意性から a, b を同定して完全平方を得る。

【解答】

(1)

$$b(p^2 + q^2) = apq.$$

$\gcd(a, b) = 1$ だから、 $b \mid apq$ にユークリッドの補題を用いて

$$b \mid pq.$$

(2) $d = \gcd(p, q)$ とし、

$$p = dr, \quad q = ds, \quad \gcd(r, s) = 1$$

とおく。等式は

$$b(r^2 + s^2) = ars$$

となる。

rs と $r^2 + s^2$ は互いに素である。実際、両方を割る素数があれば、その素数は r, s の一方を割り、平方和から他方も割ることになって $\gcd(r, s) = 1$ に反する。

従って

$$\frac{a}{b} = \frac{r^2 + s^2}{rs}$$

は両辺とも既約分数である。正の分子・分母の一意性より

$$a = r^2 + s^2, \quad b = rs.$$

よって

$$a + 2b = (r + s)^2$$

であり、

$$\sqrt{a + 2b} = r + s$$

は自然数である。

【総評】 難度 6、計算量 4。既約比を作るために最初の 2 自然数の最大公約数を先に除くことが要点である。積と平方和が互いに素になる理由を素数で直接示し、既約分数の分子・分母が一致するところまで省略せず証明した。