

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1998 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

2 次の正方行列 X と Y は $XY = YX$ のとき交換可能であるという. 2 次の正方行列 A と B は交換可能ではないが, A と AB は交換可能であり A と BA も交換可能であるとする. このとき,

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき, $ad - bc = 0$ を示せ.

(2) O を零行列とすると, $A^2 = O$ であることを示せ.

第 2 問

関数 $f_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ は, $f_1(x) = 4x^2 + 1$

$$f_n(x) = \int_0^1 (3x^2 t f_{n-1}'(t) + 3f_{n-1}(t)) dt, \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で, 帰納的に定義されている. この $f_n(x)$ を求めよ.

第 3 問

A_1, A_2, A_3 は xy 平面上の点で同一直線上にはないとする. 3 つの一次式

$$f_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1, \quad f_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2, \quad f_3(x, y) = a_3x + b_3y + c_3$$

は, 方程式 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, f_3(x, y) = 0$ によりそれぞれ直線 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 を表すとする. このとき実数 u, v をうまくとると方程式

$$uf_1(x, y)f_2(x, y) + vf_2(x, y)f_3(x, y) + f_3(x, y)f_1(x, y) = 0$$

が 3 点 A_1, A_2, A_3 を通る円を表すようにできることを示せ.

第 4 問

a は $0 < a < \pi$ を満たす定数とする. $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し, $n\pi < x < (n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a) = x \sin x$ を満たす x がただ一つ存在するので, この x の値を x_n とする.

(1) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n\pi)$$

を求めよ.

(2) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - n\pi)$$

を求めよ.

第 5 問

xy 平面上に $2n$ 個の点 $A_i(i, 1)$, $B_i(i, 2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) がある. 上下に隣り合う 2 点 A_i , B_i を結ぶ線分を「縦辺」($i = 1, 2, \dots, n$), 左右に隣り合う 2 点 A_i , A_{i+1} および B_i , B_{i+1} を結ぶ線分を「横辺」($i = 1, 2, \dots, n-1$) と言う. すべての横辺には, 各辺独立に, 確率 p で右向きの矢印が, 確率 $1-p$ で $\times$ 印が描かれている. またすべての縦辺には常に上向きの矢印が描かれている. このとき点 $A_1(1, 1)$ から出発して, 矢印の描かれている辺だけを通り, 矢印の方向に進んで, 点 $B_n(n, 2)$ に到達する経路が少なくとも 1 本存在する確率を Q_n とする. 以下の問に答えよ.

- (1) Q_2 , Q_3 を求めよ.
- (2) Q_n を求めよ.

第 6 問

自然数 n にたいし,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n 2\theta \sin^3 \theta d\theta$$

とする.

(1) I_2 の値を求めよ.

(2) xy 平面上で原点 O から点 $P(x, y)$ への距離を r , x 軸の正の方向と半直線 OP のなす (弧度法による) 角を θ とする. 方程式 $r = \sin 2\theta$, $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を, 直線 $y = x$ の周りに回転して得られる曲面が囲む立体の体積を V とするとき, $V = 3\pi I_3 + 2\pi I_2$ と表されることを示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)