

京都大学 1998 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

2 次の正方行列 X と Y は $XY = YX$ のとき交換可能であるという. 2 次の正方行列 A と B は交換可能ではないが, A と AB は交換可能であり A と BA も交換可能であるとする. このとき,

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき, $ad - bc = 0$ を示せ.

(2) O を零行列とすると, $A^2 = O$ であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

$C = AB - BA$ とおくと $C \neq O$ である. 2 つの交換条件から $AC = CA = O$ を得る. (1) は A が可逆だと矛盾することを使う. (2) は 2 次行列の恒等式 $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)E = O$ を用い, $\text{tr } A \neq 0$ も矛盾することを示す.

【解答】

(1)

$$C = AB - BA$$

とおく. A, B は交換可能でないから $C \neq O$ である. 一方, A と AB が交換可能であることから

$$A(AB) = (AB)A, \quad A^2B = ABA,$$

従って

$$AC = A(AB - BA) = O.$$

同様に, A と BA が交換可能であることから

$$A(BA) = (BA)A, \quad ABA = BA^2,$$

従って

$$CA = (AB - BA)A = O.$$

もし $\det A = ad - bc \neq 0$ ならば A は逆行列を持つ. $AC = O$ の左から A^{-1} を掛けると $C = O$ となり, 矛盾する. よって

$$ad - bc = 0.$$

(2) 2 次行列について直接成分計算すれば

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

が成り立つ. (1) より $\det A = ad - bc = 0$ だから

$$A^2 = (a + d)A.$$

$t = a + d$ とおく. $t \neq 0$ と仮定し,

$$P = \frac{1}{t}A$$

とおけば $P^2 = P$ である. また $AC = CA = O$ より $PC = CP = O$ である.

一方, $C = AB - BA = t(PB - BP)$ だから

$$O = PC = t(PB - PBP), \quad O = CP = t(PBP - BP).$$

$t \neq 0$ より $PB = PBP = BP$ となり, $C = t(PB - BP) = O$ となる. これは $C \neq O$ に矛盾する. 従って $t = 0$ であり,

$$A^2 = tA = O.$$

▶ 解法 2

【方針】

2 つの交換条件をつないで $A^2B = BA^2$ を得る。(1) は A が可逆なら直ちに矛盾すること、(2) は 2 次行列の恒等式 $A^2 - (\operatorname{tr} A)A = O$ を代入するだけで結論を出す。

【解答】

(1) A と AB が交換可能なので

$$A^2B = ABA.$$

もし $\det A \neq 0$ なら左から A^{-1} を掛けて

$$AB = BA$$

となり、仮定に反する。従って

$$\det A = ad - bc = 0.$$

(2) A と BA が交換可能なので

$$ABA = BA^2.$$

上の式と合わせて

$$A^2B = BA^2.$$

2 次行列では成分を直接展開することで

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

が成り立つ。(1) より

$$A^2 = (a + d)A.$$

これを $A^2B = BA^2$ へ代入すると

$$(a + d)AB = (a + d)BA.$$

$AB \neq BA$ だから $a + d = 0$ でなければならない。従って

$$A^2 = (a + d)A = O.$$

【総評】 難度 7、計算量 5。2 つの交換条件を別々に使って $AC = CA = O$ を得ることが核である。2 次行列の恒等式も成分計算で確認でき、固有値など大学範囲の道具は用いていない。

■ 【第 2 問】 ■

関数 $f_n(x)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) は, $f_1(x) = 4x^2 + 1$

$$f_n(x) = \int_0^1 (3x^2 t f_{n-1}'(t) + 3f_{n-1}(t)) dt, \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で, 帰納的に定義されている. この $f_n(x)$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

各 f_n が $A_n x^2 + B_n$ の形であることを帰納的に示し、積分から係数漸化式を作って解く。

【解答】

$f_{n-1}(x) = A_{n-1}x^2 + B_{n-1}$ とすると

$$\int_0^1 t f_{n-1}'(t) dt = \frac{2A_{n-1}}{3}, \quad \int_0^1 f_{n-1}(t) dt = \frac{A_{n-1}}{3} + B_{n-1}.$$

従って

$$f_n(x) = 2A_{n-1}x^2 + A_{n-1} + 3B_{n-1}.$$

初項も同じ形なので帰納的に

$$A_n = 2A_{n-1}, \quad B_n = A_{n-1} + 3B_{n-1}, \quad A_1 = 4, \quad B_1 = 1.$$

よって $A_n = 2^{n+1}$ であり、

$$B_n = 2^n + 3B_{n-1}.$$

$C_n = B_n + 2^{n+1}$ とおけば $C_n = 3C_{n-1}$ 、 $C_1 = 5$ だから

$$B_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}.$$

従って

$$f_n(x) = 2^{n+1}x^2 + 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}.$$

▶ 解法 2

【方針】

閉じた形 $2^{n+1}(x^2 - 1) + 5 \cdot 3^{n-1}$ を定義式へ代入し、数学的帰納法で直接確認する。関数の係数漸化式を別に解く必要がない。

【解答】

次の閉じた式を数学的帰納法で示す。

$$f_n(x) = 2^{n+1}(x^2 - 1) + 5 \cdot 3^{n-1}.$$

$n = 1$ では $4(x^2 - 1) + 5 = 4x^2 + 1$ で成立する。

$n - 1$ で成立すると仮定すれば

$$f_{n-1}(t) = 2^n(t^2 - 1) + 5 \cdot 3^{n-2}, \quad f'_{n-1}(t) = 2^{n+1}t.$$

従って

$$\begin{aligned} \int_0^1 t f'_{n-1}(t) dt &= \frac{2^{n+1}}{3}, \\ \int_0^1 f_{n-1}(t) dt &= -\frac{2^{n+1}}{3} + 5 \cdot 3^{n-2}. \end{aligned}$$

定義式へ代入して

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 2^{n+1}x^2 - 2^{n+1} + 5 \cdot 3^{n-1} \\ &= 2^{n+1}(x^2 - 1) + 5 \cdot 3^{n-1}. \end{aligned}$$

従って

$$f_n(x) = 2^{n+1}x^2 + 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5。文系後期第 3 問と同内容である。積分を係数漸化式に変換し、初項を含めて閉じた式を確認した。二次係数と定数項を分離した後、定数項側に適切な補助数列を導入することで一般項を短く導いた。

【第 3 問】

A_1, A_2, A_3 は xy 平面上の点で同一直線上にはないとする. 3 つの一次式

$$f_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1, \quad f_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2, \quad f_3(x, y) = a_3x + b_3y + c_3$$

は, 方程式 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, f_3(x, y) = 0$ によりそれぞれ直線 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 を表すとする. このとき実数 u, v をうまくとると方程式

$$uf_1(x, y)f_2(x, y) + vf_2(x, y)f_3(x, y) + f_3(x, y)f_1(x, y) = 0$$

が 3 点 A_1, A_2, A_3 を通る円を表すようにできることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

各 f_i を頂点 A_i での値で割って、和が 1 となる重心座標 λ_i を作る. 3 頂点を通る円の方程式を、辺長の二乗を係数とする $\lambda_i\lambda_j$ の式で表し、 f_3f_1 の係数を 1 に規格化する.

【解答】

f_i は A_i を通らない直線を表すので

$$d_i = f_i(A_i) \neq 0$$

である. そこで

$$\lambda_i(X) = \frac{f_i(X)}{d_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

とおく. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ は一次式で、各 A_j で 1 となる. 3 点は同一直線上にないので

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

が平面全体で成り立つ. また点 X の位置ベクトルは

$$X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

と表される.

辺長を

$$a = |A_2A_3|, \quad b = |A_3A_1|, \quad c = |A_1A_2|$$

とする. 位置ベクトルの内積を展開すると

$$|X|^2 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i |A_i|^2 = -(c^2 \lambda_1 \lambda_2 + a^2 \lambda_2 \lambda_3 + b^2 \lambda_3 \lambda_1).$$

左辺は $|X|^2$ から x, y の一次式を引いた形であり、 $x^2 + y^2 + \ell x + m y + n = 0$ という円の方程式である. また $X = A_i$ を代入すると左辺は 0 になるから、この円は A_1, A_2, A_3 を通る. 従ってその円は

$$c^2 \lambda_1 \lambda_2 + a^2 \lambda_2 \lambda_3 + b^2 \lambda_3 \lambda_1 = 0$$

で表される.

$\lambda_i = f_i/d_i$ を代入し、全体を $d_3 d_1 / b^2$ 倍すると

$$\frac{c^2 d_3}{b^2 d_2} f_1 f_2 + \frac{a^2 d_1}{b^2 d_2} f_2 f_3 + f_3 f_1 = 0.$$

従って

$$u = \frac{c^2 d_3}{b^2 d_2}, \quad v = \frac{a^2 d_1}{b^2 d_2}$$

と選べばよい.

▶ 解法 2

【方針】

平行移動・回転後に $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (c, 0)$, $A_3 = (p, q)$ と置き、3 辺の一次式を具体化する。二次式の xy 項を 0、 x^2, y^2 の係数を等しくする連立方程式から実数 u, v を構成する。

【解答】

平行移動と回転により

$$A_1 = (0, 0), \quad A_2 = (c, 0), \quad A_3 = (p, q)$$

と置く。ただし $c \neq 0$, $q \neq 0$ である。各辺を表す一次式を、定数倍を除いて

$$\ell_1 = qx + (c - p)y - qc, \quad \ell_2 = qx - py, \quad \ell_3 = y$$

と取れる。

$$U\ell_1\ell_2 + V\ell_2\ell_3 + \ell_3\ell_1 = 0$$

の二次部分を展開する。 xy の係数を 0 にする条件は

$$U(c - 2p) + V + 1 = 0,$$

x^2, y^2 の係数を等しくする条件は

$$Uq^2 = Up(p - c) - Vp + c - p.$$

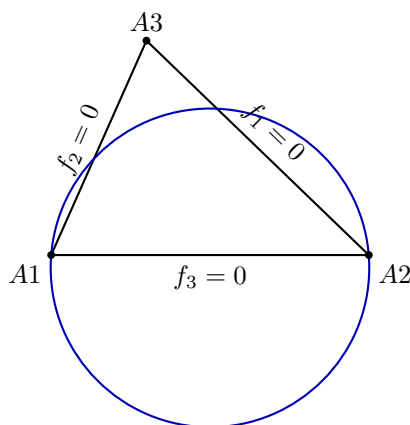
これを解くと

$$U = \frac{c}{p^2 + q^2}, \quad V = -\frac{(p - c)^2 + q^2}{p^2 + q^2}.$$

この選択では二次部分が $Uq^2(x^2 + y^2)$ となり、その係数は 0 でない。従って方程式は円を表す。

また A_1 では $\ell_2 = \ell_3 = 0$, A_2 では $\ell_1 = \ell_3 = 0$, A_3 では $\ell_1 = \ell_2 = 0$ だから、この円は 3 頂点を通る。

実際の f_i は $f_i = k_i\ell_i$ ($k_i \neq 0$) と書ける。上の方程式全体を定数倍して f_3f_1 の係数を 1 に規格化すれば、対応する実数 u, v が得られる。



【総評】 難度 8、計算量 6。一次式を正規化して重心座標を作ると、求める二次式が外接円の方程式になる。正規化に使う各値と辺長が 0 でないため係数の規格化が可能であることも確認し、実数係数の具体的な選び方まで与えた。

【第 4 問】

a は $0 < a < \pi$ を満たす定数とする. $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し, $n\pi < x < (n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a) = x \sin x$ を満たす x がただ一つ存在するので, この x の値を x_n とする.

(1) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n\pi)$$

を求めよ.

(2) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - n\pi)$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$\delta_n = x_n - n\pi$ とおき、周期性で方程式を $\sin(\delta_n + a) = x_n \sin \delta_n$ に直す. $\tan \delta_n$ の式から $\delta_n \rightarrow 0$ を示し、 $\tan t/t \rightarrow 1$ を用いて 2 次の極限を求める.

【解答】

(1)

$$\delta_n = x_n - n\pi \quad (0 < \delta_n < \pi)$$

とおく. 元の方程式から

$$\sin(\delta_n + a) = x_n \sin \delta_n.$$

加法定理を用いると

$$\sin a \cos \delta_n + \cos a \sin \delta_n = x_n \sin \delta_n,$$

従って

$$\tan \delta_n = \frac{\sin a}{x_n - \cos a}.$$

右辺は n が十分大きいとき正であるから、 $0 < \delta_n < \pi$ と合わせて $0 < \delta_n < \pi/2$ である. また $x_n > n\pi \rightarrow \infty$ なので右辺は 0 に近づく. 従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n\pi) = 0.$$

(2) 上の式から

$$(x_n - \cos a) \tan \delta_n = \sin a.$$

従って

$$n\delta_n = \frac{n}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_n - \cos a} \cdot \frac{\delta_n}{\tan \delta_n} \cdot \sin a.$$

(1) より $x_n = n\pi + \delta_n$ だから

$$\frac{n}{x_n} \rightarrow \frac{1}{\pi}, \quad \frac{x_n}{x_n - \cos a} \rightarrow 1, \quad \frac{\delta_n}{\tan \delta_n} \rightarrow 1.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - n\pi) = \frac{\sin a}{\pi}.$$

▶ 解法 2

【方針】

$\delta_n = x_n - n\pi$ と置いた正接の恒等式を、まず不等式で挟んで $\delta_n \rightarrow 0$ を示す。その後、式全体を $n\delta_n$ の積へ分解して各因子の極限を取る。

【解答】

(1)

$$\delta_n = x_n - n\pi, \quad 0 < \delta_n < \pi$$

とおく。加法定理から

$$\tan \delta_n = \frac{\sin a}{x_n - \cos a}.$$

十分大きい n では右辺は正なので $0 < \delta_n < \pi/2$ である。さらに

$$0 < \delta_n < \tan \delta_n = \frac{\sin a}{x_n - \cos a} \leq \frac{\sin a}{n\pi - \cos a}.$$

右辺は 0 へ収束するから、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

(2) また

$$(x_n - \cos a) \tan \delta_n = \sin a.$$

従って

$$n\delta_n = \frac{n}{x_n} \frac{x_n}{x_n - \cos a} \frac{\delta_n}{\tan \delta_n} \sin a.$$

$x_n = n\pi + \delta_n$ と前半の結論より

$$\frac{n}{x_n} \rightarrow \frac{1}{\pi}, \quad \frac{x_n}{x_n - \cos a} \rightarrow 1, \quad \frac{\delta_n}{\tan \delta_n} \rightarrow 1.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - n\pi) = \frac{\sin a}{\pi}.$$

【総評】 難度 7、計算量 5。解の存在・一意性は問題文で与えられている。解を区間左端からのずれで表し、まずずれが 0 へ収束することを示した後、正接と角の比の極限を用いて 1 次の漸近量まで厳密に求めた。

【第 5 問】

xy 平面上に $2n$ 個の点 $A_i(i, 1)$, $B_i(i, 2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) がある. 上下に隣り合う 2 点 A_i , B_i を結ぶ線分を「縦辺」($i = 1, 2, \dots, n$), 左右に隣り合う 2 点 A_i , A_{i+1} および B_i , B_{i+1} を結ぶ線分を「横辺」($i = 1, 2, \dots, n-1$) と言う. すべての横辺には, 各辺独立に, 確率 p で右向きの矢印が, 確率 $1-p$ で $\times$ 印が描かれている. またすべての縦辺には常に上向きの矢印が描かれている. このとき点 $A_1(1, 1)$ から出発して, 矢印の描かれている辺だけを通り, 矢印の方向に進んで, 点 $B_n(n, 2)$ に到達する経路が少なくとも 1 本存在する確率を Q_n とする. 以下の問に答えよ.

(1) Q_2 , Q_3 を求めよ.

(2) Q_n を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

経路はある列 i で縦辺を上がる形に限られる. 上段で最初に通れない横辺の位置を分類し, その位置以後の下段横辺がすべて通れる条件を数える.

【解答】

経路が存在するためには, ある i ($1 \leq i \leq n$) について

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_i, \quad A_i \rightarrow B_i, \quad B_i \rightarrow B_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow B_n$$

のすべての横辺が通ればよい.

上段の横辺を左から見て, 最初に $\times$ 印が現れる位置を t とする. すなわち $1 \leq t \leq n-1$ のとき, 上段の第 1 辺から第 $t-1$ 辺までは矢印, 第 t 辺は $\times$ 印である. この確率は

$$p^{t-1}(1-p)$$

である. この場合, 縦辺を上がる列は $i \leq t$ でなければならない. 経路が存在するための必要十分条件は, 下段の第 t 辺から第 $n-1$ 辺までがすべて矢印であることであり, その確率は p^{n-t} である. t より左の下段の状態は問わない.

上段に $\times$ 印が 1 つもない場合は確率 p^{n-1} であり, 列 n で縦辺を上がれば必ず到達できる. 従って

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{t=1}^{n-1} p^{t-1}(1-p)p^{n-t} + p^{n-1} \\ &= (n-1)(1-p)p^{n-1} + p^{n-1} \\ &= p^{n-1}\{1 + (n-1)(1-p)\}. \end{aligned}$$

(1) 特に

$$Q_2 = p(2-p), \quad Q_3 = p^2(3-2p).$$

(2)

$$Q_n = p^{n-1}\{1 + (n-1)(1-p)\}.$$

▶ 解法 2

【方針】

下段で出発点から連続して進める長さと、上段で終点まで連続して進める開始位置を確率変数として比較する。最初の失敗位置で排反分解し、経路の和を数えずに求める。

【解答】

(1) $n = 2$ のとき、下段または上段の横辺の少なくとも一方が矢印なら到達できるから

$$Q_2 = 1 - (1 - p)^2 = p(2 - p).$$

$n = 3$ では、下段の最初の $\times$ が第 1 辺、第 2 辺、または下段に $\times$ がない場合へ分けると

$$Q_3 = (1 - p)p^2 + p(1 - p)p + p^2 = p^2(3 - 2p).$$

(2) 下段 $A_1, A_2, \dots$ で最初に通れない横辺の番号を T とする。 $T = t$ ($1 \leq t \leq n - 1$) とは、第 1 辺から第 $t - 1$ 辺までが矢印、第 t 辺が $\times$ であることであり、

$$\Pr(T = t) = p^{t-1}(1 - p).$$

このとき下段から上段へ移れる最も右の列は t である。従って経路が存在する必要十分条件は、上段の第 t 辺から第 $n - 1$ 辺までがすべて矢印であることである。その条件付き確率は

$$p^{n-t}.$$

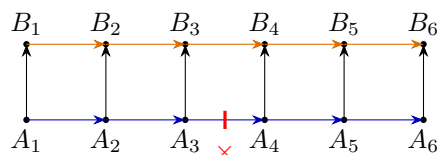
上下の横辺は独立なので、この場合の寄与は

$$p^{t-1}(1 - p)p^{n-t} = (1 - p)p^{n-1}.$$

これは $t = 1, \dots, n - 1$ の各場合で同じである。

下段に $\times$ がない場合は確率 p^{n-1} で、列 n で上がれば必ず到達できる。従って

$$\begin{aligned} Q_n &= (n - 1)(1 - p)p^{n-1} + p^{n-1} \\ &= p^{n-1}\{1 + (n - 1)(1 - p)\}. \end{aligned}$$



【総評】 難度 6、計算量 4。複数経路の和を直接包除する代わりに、上段の最初の失敗位置で排反に分類した。下段で必要な矢印と不要な部分を明確に区別し、最初の 2 つの場合への代入でも直接数えた結果と一致する。

【第 6 問】

自然数 n にたいし、

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n 2\theta \sin^3 \theta d\theta$$

とする.

- (1) I_2 の値を求めよ.
- (2) xy 平面上で原点 O から点 $P(x, y)$ への距離を r , x 軸の正の方向と半直線 OP のなす (弧度法による) 角を θ とする. 方程式 $r = \sin 2\theta$, $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を, 直線 $y = x$ の周りに回転して得られる曲面が囲む立体の体積を V とするとき, $V = 3\pi I_3 + 2\pi I_2$ と表されることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) $u = \cos \theta$ で多項式積分にする. (2) 曲線と直線 $y = x$ に挟まれた半分の領域を回転し、微小面積の回転でできる殻を積分する. 最後に同じ置換で得た I_2, I_3 の式と照合する.

【解答】

(1) $u = \cos \theta$ とおくと

$$\sin^3 \theta d\theta = (1 - u^2) \sin \theta d\theta = -(1 - u^2) du, \quad \cos 2\theta = 2u^2 - 1.$$

従って

$$I_2 = \int_{1/\sqrt{2}}^1 (2u^2 - 1)^2 (1 - u^2) du.$$

展開して積分すると

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[-\frac{4}{7}u^7 + \frac{8}{5}u^5 - \frac{5}{3}u^3 + u \right]_{1/\sqrt{2}}^1 \\ &= \frac{38 - 26\sqrt{2}}{105}. \end{aligned}$$

(2) 曲線は直線 $y = x$ について対称である. $0 \leq \theta \leq \pi/4$ 側の領域だけを直線 $y = x$ の周りに 1 回転すれば、求める立体を重複なく得る. 極座標の微小面積は $\rho d\rho d\theta$ で、点 (ρ, θ) から回転軸までの距離は

$$\rho \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

である. 従って円筒殻の考え方により

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sin 2\theta} \rho \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin^3 2\theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) d\theta. \end{aligned}$$

$\phi = \frac{\pi}{4} - \theta$ とおくと $\sin 2\theta = \cos 2\phi$ だから

$$V = \frac{2\pi}{3} J, \quad J = \int_0^{\pi/4} \cos^3 2\phi \sin \phi d\phi.$$

ここで (1) と同じく $u = \cos \phi$ において展開すると

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{38}{105} - \frac{52}{105\sqrt{2}}, \\ I_3 &= -\frac{94}{315} + \frac{136}{315\sqrt{2}}, \quad J = -\frac{9}{35} + \frac{16}{35\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

これから

$$J = \frac{9}{2} I_3 + 3 I_2$$

である。従って

$$V = \frac{2\pi}{3}J = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{9}{2}I_3 + 3I_2 \right) = 3\pi I_3 + 2\pi I_2.$$

▶ 解法 2

【方針】

対称軸の片側を極座標の円筒殻として回すところまでは幾何的に導く。得られた補助積分 J と I_2, I_3 は同じ置換で多項式積分にし、数値を省略せず照合する。

【解答】

(1) $u = \cos \theta$ とおくと

$$I_2 = \int_{1/\sqrt{2}}^1 (2u^2 - 1)^2 (1 - u^2) du.$$

展開して

$$I_2 = \left[-\frac{4}{7}u^7 + \frac{8}{5}u^5 - \frac{5}{3}u^3 + u \right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{38 - 26\sqrt{2}}{105}.$$

(2) 曲線 $r = \sin 2\theta$ は $y = x$ について対称である。その片側

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq \sin 2\theta$$

だけを軸の周りに回す。微小面積 $\rho d\rho d\theta$ の回転半径は

$$\rho \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

なので、円筒殻により

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin^3 2\theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) d\theta.$$

$\phi = \pi/4 - \theta$ とおき

$$J = \int_0^{\pi/4} \cos^3 2\phi \sin \phi d\phi$$

とすれば $V = 2\pi J/3$ である。

$u = \cos \phi$ によって 3 つの積分を同じ区間 $[1/\sqrt{2}, 1]$ の多項式積分へ直すと

$$I_2 = \frac{38}{105} - \frac{52}{105\sqrt{2}},$$

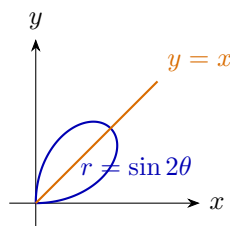
$$I_3 = -\frac{94}{315} + \frac{136}{315\sqrt{2}}, \quad J = -\frac{9}{35} + \frac{16}{35\sqrt{2}}.$$

直接整理して

$$J = \frac{9}{2}I_3 + 3I_2.$$

従って

$$V = \frac{2\pi}{3}J = 3\pi I_3 + 2\pi I_2.$$



【総評】 難度 8、計算量 8。回転軸が領域を横切るため、対称軸の片側だけを殻として回すことが重要である。極座標の面積要素と回転半径を別々に入れ、最後は 3 つの積分を同じ置換で多項式化して恒等式を厳密に照合した。