

京都大学 1999 年度 文系（後期）

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、 PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 点を $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ と置き、 $p < q$ としてよい。弦 PQ の方程式を出すと、放物線との差が $(x-p)(q-x)$ になり、囲まれる面積は端点差 $q-p$ だけで決まる。面積が 1 であることから $q-p = \sqrt[3]{6}$ を固定し、中点 $R(X, Y)$ について $Y - X^2 = (q-p)^2/4$ を計算すれば軌跡の方程式が得られる。

【解答】

2 点を $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ とおく。2 点の順序を入れ替えても線分 PQ は同じなので、 $p < q$ としてよい。

直線 PQ の傾きは $\frac{q^2 - p^2}{q - p} = p + q$ である。よって直線 PQ は $y - p^2 = (p + q)(x - p)$ すなわち $y = (p + q)x - pq$ である。 $p < x < q$ では、直線 PQ は放物線 $y = x^2$ より上にある。実際、差は $(p + q)x - pq - x^2 = -(x^2 - (p + q)x + pq) = (x - p)(q - x)$ であり、これは $p < x < q$ で正である。したがって囲まれる部分の面積は

$$\int_p^q \{(p + q)x - pq - x^2\} dx = \int_p^q (x - p)(q - x) dx$$

である。ここで $u = x - p$ とおくと、 $0 \leq u \leq q - p$ であり

$$\begin{aligned} \int_p^q (x - p)(q - x) dx &= \int_0^{q-p} u\{(q - p) - u\} du \\ &= \left[\frac{(q - p)u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^{q-p} = \frac{(q - p)^3}{6} \end{aligned}$$

となる。これが常に 1 であるから $\frac{(q - p)^3}{6} = 1$ すなわち $q - p = \sqrt[3]{6}$ である。

中点 R の座標を (X, Y) とすると $X = \frac{p + q}{2}, Y = \frac{p^2 + q^2}{2}$ である。ここで $\frac{p^2 + q^2}{2} = \left(\frac{p + q}{2}\right)^2 + \frac{(q - p)^2}{4}$ だから $Y = X^2 + \frac{(q - p)^2}{4}$ である。 $q - p = \sqrt[3]{6}$ を代入して $Y = X^2 + \frac{(\sqrt[3]{6})^2}{4} = X^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$ を得る。したがって求める図形の方程式は $y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

中点の横座標 X と弦の端点間隔 d を最初に導入する。弦と放物線の差が、中心 X に関して対称な二次式 $d^2/4 - u^2$ になるので、面積と中点の高さを同じ 2 変数で一度に計算する。

【解答】

中点 R の x 座標を X 、2 点の横座標の差を $d > 0$ とすると

$$P = \left(X - \frac{d}{2}, \left(X - \frac{d}{2} \right)^2 \right), \quad Q = \left(X + \frac{d}{2}, \left(X + \frac{d}{2} \right)^2 \right).$$

$x = X + u$ と置けば、弦 PQ と放物線の縦の差は

$$\frac{d^2}{4} - u^2 \quad \left(-\frac{d}{2} \leq u \leq \frac{d}{2} \right)$$

である。従って面積は

$$\int_{-d/2}^{d/2} \left(\frac{d^2}{4} - u^2 \right) du = \frac{d^3}{6}.$$

これが 1 だから $d = \sqrt[3]{6}$ である。

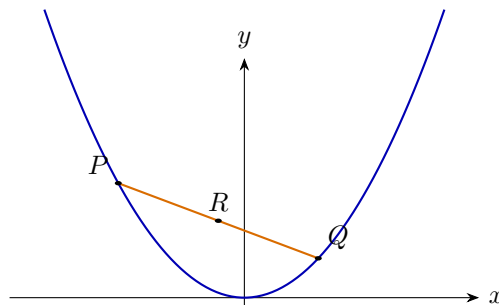
中点の y 座標を Y とすると

$$Y = \frac{(X - d/2)^2 + (X + d/2)^2}{2} = X^2 + \frac{d^2}{4}.$$

よって軌跡は

$$y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

である。任意の実数 X に対して上の P, Q を取れるので、方程式上の全ての点を実現する。



【総評】 難度 5、計算量 5。放物線の弦で切り取る面積が端点差の 3 乗に比例することを、その場で積分して確認する問題である。想定時間は 15 分程度。弦の式を出した後、直線と放物線の差を $(x - p)(q - x)$ に因数分解できると計算が安定する。軌跡では、 $p + q$ は自由に動くが $q - p$ は面積条件で固定される、という役割分担を意識したい。最後の定数は $(\sqrt[3]{6})^2/4 = \sqrt[3]{36}/4$ であり、平方と立方根の整理ミスに注意する。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 2 問】

α, β が $\alpha > 0^\circ, \beta > 0^\circ, \alpha + \beta < 180^\circ$ かつ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2(\alpha + \beta)$ を満たすとき、 $\sin \alpha + \sin \beta$ の取りうる範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

与式の差を積に直し、角が正であることから $\cos(\alpha + \beta) = 0$ を得る。その後 $\sin \alpha + \cos \alpha$ の範囲を求める。

【解答】

恒等式

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \\ = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

を用いる。仮定より左辺は 0 である。また

$$\alpha > 0^\circ, \beta > 0^\circ, \alpha + \beta < 180^\circ$$

だから $\sin \alpha > 0, \sin \beta > 0$ である。従って

$$\cos(\alpha + \beta) = 0,$$

すなわち

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

よって $\beta = 90^\circ - \alpha$ で、 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ であるから

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ).$$

この値は $\alpha = 45^\circ$ のとき $\sqrt{2}$ となる。一方、 $\alpha \rightarrow 0^\circ + 0$ または $\alpha \rightarrow 90^\circ - 0$ のとき 1 に近づくが、端点は許されないので 1 にはならない。

従って取りうる範囲は

$$1 < \sin \alpha + \sin \beta \leq \sqrt{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

与式から $\alpha + \beta = 90^\circ$ を得た後、和積公式ではなく平方を計算する。 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$ と $0 < \sin 2\alpha \leq 1$ から端点の開閉も含めて範囲を決める。

【解答】

与式の差を整理すると

$$2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = 0.$$

$\alpha, \beta > 0^\circ$ かつ $\alpha + \beta < 180^\circ$ なので

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

従って $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ で

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

その平方は

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha.$$

$0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$ より

$$0 < \sin 2\alpha \leq 1.$$

左辺は正だから平方根を取り

$$1 < \sin \alpha + \sin \beta \leq \sqrt{2}.$$

上端は $\alpha = \beta = 45^\circ$ で取り、下端 1 は $\alpha \rightarrow 0^\circ + 0$ または $90^\circ - 0$ で近づきだけなので含まない。

【総評】 難度 5、計算量 3。元の等式は角の和を一意に決める。下端 1 は極限としてのみ現れ、上端は実際に達成される点が重要である。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 3 問】

座標平面上で、 x 座標と y 座標が共に整数である点を格子点という。 n は自然数であるとして、不等式

$$x > 0, \quad y > 0, \quad \log_2 \frac{y}{x} \leq x \leq n$$

を満たす格子点の個数を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

整数 x を $1, \dots, n$ に固定する。対数不等式を $y \leq x2^x$ に直して各 x の個数を数え、有限和を計算する。

【解答】

条件 $x > 0$, $x \leq n$ より、 x は

$$1, 2, \dots, n$$

のいずれかである。 x を固定すると

$$\log_2 \frac{y}{x} \leq x$$

は、底 2 の対数が増加関数であることから

$$\frac{y}{x} \leq 2^x, \quad y \leq x2^x$$

と同値である。 y は正の整数なので、この x に対して y は

$$1, 2, \dots, x2^x$$

の $x2^x$ 通りある。

従って求める格子点の個数は

$$\sum_{x=1}^n x2^x$$

である。有限等比数列を微分するか、数学的帰納法を用いると

$$\sum_{x=1}^n x2^x = 2 + (n-1)2^{n+1}.$$

実際、 $n=1$ では両辺は 2 であり、右辺に次項 $(n+1)2^{n+1}$ を加えると

$$2 + n2^{n+2} = 2 + \{(n+1) - 1\}2^{(n+1)+1}$$

となる。

よって格子点の個数は

$$2 + (n-1)2^{n+1}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

各 x に対する y の個数を数えた後、和 $x2^x$ を望遠和になる恒等式へ変形する。微分公式を使わずに隣接項を相殺し、有限和を直接求める。

【解答】

x を $1, 2, \dots, n$ のいずれかに固定すると

$$\log_2 \frac{y}{x} \leq x \iff 1 \leq y \leq x2^x.$$

従って格子点数は

$$\sum_{x=1}^n x2^x$$

である。

ここで

$$x2^x = (x-1)2^{x+1} - (x-2)2^x$$

と変形する。これを $x = 1, \dots, n$ で足すと中間項が全て消え

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n x2^x &= (n-1)2^{n+1} - (-1)2 \\ &= 2 + (n-1)2^{n+1}. \end{aligned}$$

従って求める個数は

$$2 + (n-1)2^{n+1}$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 4。対数の定義域は $x, y > 0$ で既に保証される。上端 $x2^x$ は整数なので、そのまま個数になる。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 4 問】

3 次関数 $y = x^3 + kx$ のグラフを考える。連立不等式 $\begin{cases} y > -x \\ y < -1 \end{cases}$ が表す領域を A とする。 A のどの点からも上の 3 次関数のグラフに接線が 3 本引けるための、 k についての必要十分条件を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

点 (X, Y) を通る接線の接点を t とし、 t の三次方程式を作る。3 本の接線が引ける条件を極大値・極小値の符号で表し、領域 A の全点で成り立つ k の範囲を求める。

【解答】

曲線を

$$f(x) = x^3 + kx$$

とする。接点の x 座標を t とすると、接線は

$$y = (3t^2 + k)x - 2t^3$$

である。従って点 (X, Y) を通る接線の本数は

$$P(t) = 2t^3 - 3Xt^2 + Y - kX = 0$$

の異なる実数解の個数に等しい。

領域 A は

$$Y > -X, \quad Y < -1$$

であり、従って必ず $X > 1$ である。 $P'(t) = 6t(t - X)$ なので、 $X > 1$ のもとで P は $t = 0$ で極大、 $t = X$ で極小となる。相異なる 3 実根をもつための必要十分条件は

$$P(0) > 0, \quad P(X) < 0,$$

すなわち

$$0 < Y - kX < X^3$$

である。

これがすべての $X > 1$, $-X < Y < -1$ で成り立つ条件を調べる。まず

$$Y - kX > 0$$

が全域で成り立つには、 Y を $-X$ に近づけて考えることにより

$$-(k+1)X \geq 0,$$

すなわち

$$k \leq -1$$

が必要十分である。境界 $k = -1$ でも $Y > -X$ なので不等号は厳密である。

次に

$$Y - kX < X^3$$

が全域で成り立つには、 Y を -1 に近づけて

$$-1 - kX \leq X^3$$

がすべての $X > 1$ で成り立てばよい。これは

$$k \geq -\left(X^2 + \frac{1}{X}\right)$$

がすべての $X > 1$ で成り立つことと同値である。 $X^2 + 1/X$ は $X > 1$ で増加し、その下限は 2 だから

$$k \geq -2$$

である。 $k = -2$ のときも $X > 1$ では $X^3 - 2X + 1 > 0$ なので問題ない。

以上より必要十分条件は

$$-2 \leq k \leq -1$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

接点を t とする三次方程式について、極値の大小を述べる代わりに、3 実根が $(-\infty, 0)$, $(0, X)$, (X, ∞) に 1 つずつ入るための符号条件を使う。領域の境界へ近づけて k の必要十分条件を絞る。

【解答】

点 $(X, Y) \in A$ を通り、 t を接点とする接線条件は

$$P(t) = 2t^3 - 3Xt^2 + Y - kX = 0.$$

A では $X > 1$ であり

$$P'(t) = 6t(t - X).$$

三次方程式が相異なる 3 実根をもつことは、根が

$$(-\infty, 0), \quad (0, X), \quad (X, \infty)$$

に 1 つずつ入ることと同値である。その符号条件は

$$P(0) > 0, \quad P(X) < 0,$$

すなわち

$$0 < Y - kX < X^3.$$

これが全ての $X > 1, -X < Y < -1$ で成り立つ条件を求める。左側は $Y \rightarrow -X + 0$ として

$$k \leq -1.$$

右側は $Y \rightarrow -1 - 0$ として

$$-1 - kX \leq X^3 \iff k \geq -\left(X^2 + \frac{1}{X}\right).$$

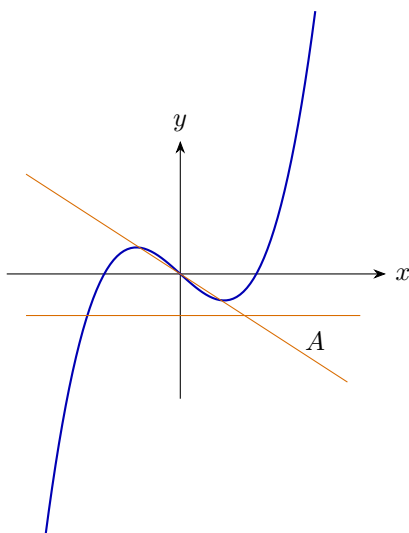
$X > 1$ で $X^2 + 1/X > 2$ かつ下限が 2 だから

$$k \geq -2.$$

端点でも領域の不等号が厳密なので、必要十分条件は

$$-2 \leq k \leq -1$$

である。



【総評】 難度 8、計算量 7。接線 3 本の条件は接点パラメータの三次方程式が 3 実根をもつ条件である。領域の境界が開いているため、 $(k=-2, -1)$ も含まれる。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 5 問】

自然数 a, b, c について、等式 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立ち、かつ a, b は互いに素とする。このとき、次のことを証明せよ。

- (1) a が奇数ならば、 b は偶数であり、したがって c は奇数である。
 (2) a が奇数のとき、 $a + c = 2d^2$ となる自然数 d が存在する。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 平方数の 4 を法とする余りで偶奇を決める。(2) $c^2 - a^2 = b^2$ を半分ずつに因数分解し、互いに素な二数の積が平方数であることを使う。

【解答】

(1) a が奇数なら

$$a^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

もし b も奇数なら

$$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となるが、平方数の 4 での余りは 0 または 1 なので矛盾する。従って b は偶数である。すると

$$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

だから c は奇数である。

(2) $\gcd(a, b) = 1$ かつ $c^2 = a^2 + b^2$ より

$$\gcd(a, c) = 1$$

である。実際、 a, c の公約数は $c^2 - a^2 = b^2$ も割るため、 a, b の公約数になる。

(1) より a, c は奇数、 b は偶数である。そこで

$$U = \frac{c+a}{2}, \quad V = \frac{c-a}{2}$$

とおく。 $c > a > 0$ なので U, V は自然数であり、

$$UV = \frac{c^2 - a^2}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

また U, V の公約数は $U + V = c$ と $U - V = a$ をともに割るので

$$\gcd(U, V) = 1.$$

互いに素な二つの自然数の積が平方数なら、それぞれが平方数である。従ってある自然数 d が存在して

$$U = d^2.$$

すなわち

$$a + c = 2d^2$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

原始ピタゴラス数の標準表示を、この問題に必要な部分だけ因数分解から導く。互いに素な $(c+a)/2, (c-a)/2$ の積が平方数なのでそれぞれ平方数となり、 $a = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$ を得る。

【解答】

(1) a が奇数なら $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$ である。 b も奇数なら

$$c^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となり不可能だから、 b は偶数である。従って $c^2 \equiv 1 \pmod{4}$ で c は奇数である。

(2) $\gcd(a, b) = 1$ から $\gcd(a, c) = 1$ でもある。そこで

$$U = \frac{c+a}{2}, \quad V = \frac{c-a}{2}$$

と置くと

$$UV = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

U, V の公約数は $U+V=c$ と $U-V=a$ を割るので $\gcd(U, V) = 1$ である。互いに素な積が平方数なら各因子の素因数指数は全て偶数だから

$$U = m^2, \quad V = n^2$$

となる自然数 m, n が存在する。従って

$$a = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2.$$

特に

$$a + c = 2m^2.$$

よって $d = m$ と取ればよい。

【総評】 難度 6、計算量 4。第 (2) 問では単に因数分解するだけでなく、二因子が互いに素であることを示すことで各因子が平方数と結論できる。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。