

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1999 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標平面上で原点を通る直線と $y = x|x + 2|$ のグラフが相異なる 3 点で交わっている．このグラフとこの直線によって囲まれる図形で、この直線より下側にあるものの面積を S_1 、上側にあるものの面積を S_2 とする． $S_1 : S_2 = 9 : 8$ となるとき、この直線の傾きを求めよ．

第 2 問

α, β, γ は $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi$ を満たすものとする. このとき, $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ の最大値を求めよ.

第 3 問

α を正の定数として, 数列 a_n, b_n ($n \geq 1$) を次の式で定める.

$$2a_{n+1} = \alpha(3a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2 - a_n + b_n)$$

$$2b_{n+1} = \alpha(-a_n^2 - 2a_nb_n - b_n^2 - a_n + b_n)$$

$$a_1 = b_1 = 1$$

(1) $a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$ を求めよ.

(2) $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ を求めよ.

第 4 問

$\triangle ABC$ は鋭角三角形とする．このとき，各面すべてが $\triangle ABC$ と合同な四面体が存在することを示せ．

第 5 問

a, b を整数, u, v を有理数とする. $u + v\sqrt{3}$ が $x^2 + ax + b = 0$ の解であるならば, u と v は共に整数であることを示せ. ただし $\sqrt{3}$ が無理数であることは使ってよい.

第 6 問

- (1) $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続な関数とする. このとき,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad a \leq c \leq b$$

となる c が存在することを示せ.

- (2) $y = \sin x$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分と $y = 1$ および y 軸が囲む図形を, y 軸のまわりに回転して得られる立体を考える. この立体を y 軸に垂直な $n - 1$ 個の平面によって各部分の体積が等しくなるように n 個に分割するとき, $y = 1$ に最も近い平面の y 座標を y_n とする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - y_n)$$

を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)