

京都大学 1999 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上で原点を通る直線と $y = x|x + 2|$ のグラフが相異なる 3 点で交わっている。このグラフとこの直線によって囲まれる図形で、この直線より下側にあるものの面積を S_1 、上側にあるものの面積を S_2 とする。 $S_1 : S_2 = 9 : 8$ となるとき、この直線の傾きを求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

直線を $y = mx$ とし、絶対値の折れ点 $x = -2$ の両側で交点を求める。直線の上下にある二領域の面積を積分し、 $0 < m < 2$ と $m > 2$ を分けて比を解く。

【解答】

直線を $y = mx$ とする。曲線は

$$y = \begin{cases} -x^2 - 2x & (x < -2), \\ x^2 + 2x & (x \geq -2) \end{cases}$$

である。原点以外の交点の x 座標は

$$-(m+2), \quad m-2$$

である。相異なる 3 点で交わるためには

$$m > 0, \quad m \neq 2$$

が必要である。

曲線と直線の差を $D(x)$ とする。直線より下側にある領域の面積は、原点と $x = m - 2$ の間にでき、

$$S_1 = \frac{|m-2|^3}{6}$$

である。

まず $0 < m < 2$ とする。このとき直線より上側の領域は

$$x = -(m+2) \quad \text{から} \quad x = m-2$$

までである。折れ点 -2 で分けて積分すると

$$S_2 = 2m^2.$$

従って

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(2-m)^3}{12m^2}.$$

条件 $S_1 : S_2 = 9 : 8$ より

$$2(2-m)^3 = 27m^2.$$

左辺と右辺の比 $(2-m)^3/m^2$ は $0 < m < 2$ で単調減少するので解は高々一つであり、代入により

$$m = \frac{1}{2}$$

が解である。

次に $m > 2$ とする。このとき

$$S_2 = \int_{-(m+2)}^0 D(x) dx = \frac{(m+2)^3 - 16}{6}.$$

しかし

$$\{(m+2)^3 - 16\} - (m-2)^3 = 12m^2 > 0$$

だから $S_1/S_2 < 1$ であり、 $9/8$ にはならない。

従って求める傾きは

$$\frac{1}{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

面積公式を得た後、比の方程式を単調性に頼らず因数分解する。 $0 < m < 2$ では三次式が $(2m-1)(m+4)^2$ に分かれるため解が直ちに定まり、 $m > 2$ は面積比較で除外する。

【解答】

直線を $y = mx$ とする。原点以外の交点は

$$x = -(m+2), \quad x = m-2$$

で、3 点が相異なる条件は $m > 0, m \neq 2$ である。面積計算から

$$S_1 = \frac{|m-2|^3}{6}.$$

$0 < m < 2$ では

$$S_2 = 2m^2.$$

従って $S_1 : S_2 = 9 : 8$ は

$$2(2-m)^3 = 27m^2.$$

整理すると

$$2m^3 + 15m^2 + 24m - 16 = (2m-1)(m+4)^2 = 0.$$

範囲内の解は $m = 1/2$ だけである。

$m > 2$ では

$$6S_2 = (m+2)^3 - 16,$$

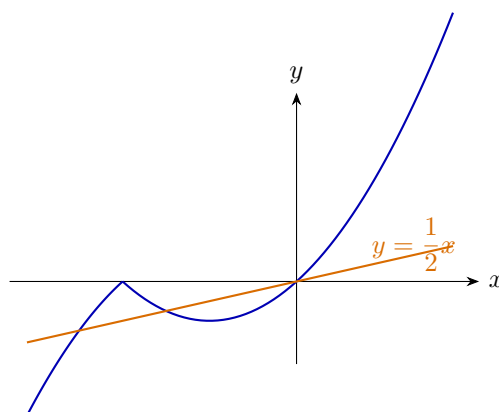
かつ

$$6(S_2 - S_1) = (m+2)^3 - 16 - (m-2)^3 = 12m^2 > 0.$$

従って $S_1/S_2 < 1$ となり $9/8$ にはならない。よって傾きは

$$\frac{1}{2}$$

である。



【総評】 難度 8、計算量 8。交点の順序が ($m=2$) を境に変わるため、面積式を二場合に分ける。後半は方程式を解かず比が 1 未満と示せる。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 2 問】

α, β, γ は $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi$ を満たすものとする。このとき、 $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$\sin \alpha + \sin \beta$ を和積公式で評価し、まず $\alpha = \beta$ のときに最大となることを示す。残る一変数を微分して最大化する。

【解答】

γ を固定すると $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ である。和積公式より

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 2 \cos \frac{\gamma}{2},$$

等号は $\alpha = \beta$ のときに成り立つ。さらに相加相乗平均より

$$\sin \alpha \sin \beta \leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \right)^2 \leq \cos^2 \frac{\gamma}{2}.$$

従って

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin \gamma.$$

$u = \gamma/2$ とおくと右辺は

$$2 \sin u \cos^3 u.$$

これを微分すると

$$2 \cos^2 u (1 - 4 \sin^2 u)$$

となるから、 $0 < u < \pi/2$ で最大となるのは

$$\sin u = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{\pi}{6},$$

すなわち $\gamma = \pi/3$ のときである。このとき等号条件から

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}.$$

従って最大値は

$$\left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

▶ 解法 2

【方針】

$\log \sin x$ の凹性を使う。3 角の平均が $\pi/3$ であることへ Jensen 型の評価を適用すると、積の最大値と等号条件が対称に一度で得られる。凹性は 2 階微分を答案内で確認する。

【解答】

$g(x) = \log(\sin x)$ と置くと、 $0 < x < \pi$ で

$$g''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

従って g は狭義凹関数である。3 数の平均は

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{\pi}{3}$$

だから、凹性より

$$\frac{g(\alpha) + g(\beta) + g(\gamma)}{3} \leq g\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

指数を取って

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

狭義凹性の等号条件は

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$$

であり、実際に条件を満たす。従って最大値は

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 4。二段階の不等式の等号条件が同時に成立することを確認し、三角形が正三角形の場合に最大値が実現する。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 3 問】

α を正の定数として、数列 a_n, b_n ($n \geq 1$) を次の式で定める。

$$2a_{n+1} = \alpha(3a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2 - a_n + b_n)$$

$$2b_{n+1} = \alpha(-a_n^2 - 2a_nb_n - b_n^2 - a_n + b_n)$$

$$a_1 = b_1 = 1$$

(1) $a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$ を求めよ。

(2) $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

和 $u_n = a_n + b_n$ と差 $v_n = a_n - b_n$ を導入する。漸化式から偶数番では $u = 0$ 、奇数番では $v = 0$ が交互に成り立つことを示し、値と比を求める。

【解答】

(1)

$$u_n = a_n + b_n, \quad v_n = a_n - b_n$$

とおく。二つの漸化式を加減すると

$$u_{n+1} = \alpha v_n(u_n - 1), \quad v_{n+1} = \alpha u_n(u_n + v_n)$$

を得る。初項は

$$u_1 = 2, \quad v_1 = 0$$

である。

従って

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 4\alpha,$$

なので

$$a_2 = 2\alpha, \quad b_2 = -2\alpha.$$

次に

$$u_3 = -4\alpha^2, \quad v_3 = 0,$$

従って

$$a_3 = b_3 = -2\alpha^2.$$

さらに

$$u_4 = 0, \quad v_4 = 16\alpha^5,$$

従って

$$a_4 = 8\alpha^5, \quad b_4 = -8\alpha^5.$$

(2) 一般に $u_{2n} = 0$ なら $v_{2n+1} = 0$ 、また $v_{2n+1} = 0$ なら $u_{2n+2} = 0$ である。初期値から数学的帰納法により

$$u_{2n} = 0, \quad v_{2n+1} = 0$$

がすべての $n \geq 1$ で成り立つ。特に

$$b_{2n} = -a_{2n}.$$

これを a_{n+1} の漸化式に代入すると

$$\begin{aligned} 2a_{2n+1} &= \alpha\{3a_{2n}^2 - 2a_{2n}^2 - a_{2n}^2 - a_{2n} - a_{2n}\} \\ &= -2\alpha a_{2n}. \end{aligned}$$

従って

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = -\alpha.$$

$\alpha > 0$ で初期値から各 $a_{2n} \neq 0$ なので、この比は常に定義される。

▶ 解法 2

【方針】

数列が「 $a = b$ の状態」と「 $a = -b$ の状態」を交互に移ることを元の漸化式へ直接代入して示す。和差の一般式を作らず、2 状態の遷移だけから初期値と比を求める。

【解答】

(1) 元の漸化式へ $a_1 = b_1 = 1$ を直接代入して

$$a_2 = 2\alpha, \quad b_2 = -2\alpha.$$

一般に $a = A, b = -A$ を代入すると次の項は

$$a' = -\alpha A, \quad b' = -\alpha A,$$

また $a = b = C$ を代入すると

$$a' = 2\alpha C^2, \quad b' = -2\alpha C^2.$$

従って

$$\begin{aligned} a_3 &= b_3 = -2\alpha^2, \\ a_4 &= 8\alpha^5, \quad b_4 = -8\alpha^5. \end{aligned}$$

(2) 上の 2 状態の遷移により、全ての $n \geq 1$ で

$$b_{2n} = -a_{2n}, \quad a_{2n+1} = b_{2n+1}$$

が帰納的に成り立つ。特に $a_{2n} = A$ と置いた直後は

$$a_{2n+1} = -\alpha A.$$

従って

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = -\alpha.$$

$\alpha > 0$ かつ初期値から各偶数項は 0 でないため、この比は常に定義される。

【総評】 難度 7、計算量 7。複雑な二変数漸化式は和と差で交互に一方が 0 になる構造をもつ。第 (2) 問では閉じた一般項を求める必要はない。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 4 問】

$\triangle ABC$ は鋭角三角形とする。このとき、各面すべてが $\triangle ABC$ と合同な四面体が存在することを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

鋭角三角形の三辺を a, b, c とし、向かい合う辺がそれぞれ等しい四面体を座標で構成する。必要な三つの座標平方が正になることを鋭角条件から保証する。

【解答】

三角形 ABC の辺長を

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$$

とする。鋭角三角形なので余弦定理より

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0, \quad c^2 + a^2 - b^2 > 0, \quad a^2 + b^2 - c^2 > 0.$$

そこで正数 x, y, z を

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8}, \quad y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{8}, \quad z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{8}$$

で定める。

空間内に 4 点

$$\begin{aligned} P_1 &= (x, y, z), & P_2 &= (x, -y, -z), \\ P_3 &= (-x, y, -z), & P_4 &= (-x, -y, z) \end{aligned}$$

をとる。例えば

$$|P_1 P_2| = 2\sqrt{y^2 + z^2} = a,$$

同様に

$$|P_1 P_3| = b, \quad |P_1 P_4| = c.$$

さらに向かい合う辺も

$$|P_3 P_4| = a, \quad |P_2 P_4| = b, \quad |P_2 P_3| = c$$

となる。

従って四面体 $P_1 P_2 P_3 P_4$ の各面は、いずれも三辺の長さが a, b, c の三角形である。三辺相等により各面は $\triangle ABC$ と合同である。 $x, y, z > 0$ なので 4 点は同一平面上になく、確かに四面体をなす。

▶ 解法 2

【方針】

三つの正数 x, y, z を互いに直交する 3 方向の長さとし、直方体の互い違いの 4 頂点を選ぶ。向かい合う辺が等しい四面体になり、全ての面の三辺が元の三角形と一致することを幾何的に確認する。

【解答】

$\triangle ABC$ の三辺を a, b, c とする。鋭角条件より

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0, \quad c^2 + a^2 - b^2 > 0, \quad a^2 + b^2 - c^2 > 0.$$

正数 x, y, z を

$$4(y^2 + z^2) = a^2, \quad 4(z^2 + x^2) = b^2, \quad 4(x^2 + y^2) = c^2$$

で定めると、解は

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8}$$

およびその巡回形であり、全て正である。

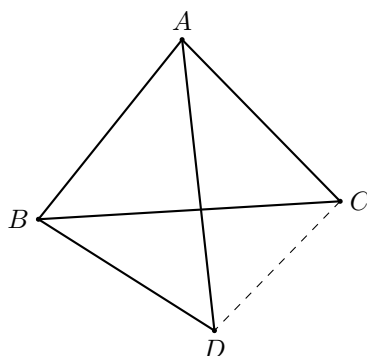
互いに直交する 3 方向を座標軸として、直方体の 4 頂点

$$(x, y, z), \quad (x, -y, -z), \quad (-x, y, -z), \quad (-x, -y, z)$$

を選ぶ。各辺の長さは

$$2\sqrt{y^2 + z^2} = a, \quad 2\sqrt{z^2 + x^2} = b, \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} = c$$

のいずれかで、向かい合う辺は等しい。従って 4 面は全て三辺 a, b, c の三角形であり、 $\triangle ABC$ と合同である。



【総評】 難度 7、計算量 5。鋭角条件は三つの座標を実数かつ非零にするために正確に使われる。構成後は各辺長を直接確認する。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 5 問】

a, b を整数, u, v を有理数とする. $u + v\sqrt{3}$ が $x^2 + ax + b = 0$ の解であるならば, u と v は共に整数であることを示せ. ただし $\sqrt{3}$ が無理数であることは使ってよい.

▶ 解法 1

【方針】

方程式へ代入し、 $\sqrt{3}$ の無理性から有理部分と無理部分を分ける。まず $2u, 2v$ が整数であることを示し、積の整数性を 4 を法として調べて偶数性を確定する。

【解答】

方程式へ $u + v\sqrt{3}$ を代入すると

$$u^2 + 3v^2 + au + b + v(2u + a)\sqrt{3} = 0.$$

$\sqrt{3}$ は無理数で、各係数は有理数だから

$$u^2 + 3v^2 + au + b = 0, \quad v(2u + a) = 0$$

である。

まず $v = 0$ の場合、 u は整数係数のモニック多項式の有理根なので整数であり、結論が成り立つ。

以下 $v \neq 0$ とする。このとき

$$2u = -a$$

なので $2u$ は整数である。また共役数 $u - v\sqrt{3}$ ももう一つの解となり、解の積から

$$u^2 - 3v^2 = b.$$

$m = 2u$ とおけば

$$3(2v)^2 = m^2 - 4b$$

は整数である。 $2v = r/s$ を互いに素な整数 $r, s > 0$ で表すと

$$3r^2 = s^2(m^2 - 4b).$$

従って s^2 は 3 を割るので $s = 1$ であり、 $2v$ も整数である。

そこで

$$m = 2u, \quad n = 2v$$

を整数とすると

$$m^2 - 3n^2 = 4b$$

である。平方数を 4 で見れば 0 または 1 である。もし n が奇数なら左辺は $m^2 - 3$ となり 0 にはならないので矛盾する。従って n は偶数であり、上式から m^2 も 4 の倍数、従って m も偶数である。

よって

$$u = \frac{m}{2}, \quad v = \frac{n}{2}$$

はともに整数である。

▶ 解法 2

【方針】

根 $\theta = u + v\sqrt{3}$ とその共役 $\theta' = u - v\sqrt{3}$ を Vieta の公式で扱う。 $v = 0$ を先に分け、 $v \neq 0$ では和と積から $2u, 2v$ の整数性を導き、最後に 4 を法とする偶奇だけで半整数の可能性を除く。

【解答】

$\theta = u + v\sqrt{3}$ と置く。代入して無理部分を比較すると

$$v(2u + a) = 0.$$

$v = 0$ なら $\theta = u$ は整数係数モニク多項式の有理根なので $u \in \mathbb{Z}$ である。

$v \neq 0$ なら

$$2u = -a \in \mathbb{Z}.$$

共役 $\theta' = u - v\sqrt{3}$ も根で、Vieta の公式から

$$u^2 - 3v^2 = b.$$

$m = 2u$ と置けば

$$3(2v)^2 = m^2 - 4b \in \mathbb{Z}.$$

$2v = r/s$ を既約分数とすると $s^2 \mid 3r^2$ なので $s = 1$ 。従って $n = 2v \in \mathbb{Z}$ で

$$m^2 - 3n^2 = 4b.$$

n が奇数なら左辺は 4 を法として $m^2 - 3$ となり 0 にならない。よって n は偶数であり、式から m も偶数である。従って

$$u = \frac{m}{2}, \quad v = \frac{n}{2}$$

はともに整数である。

【総評】 難度 7、計算量 5。有理数がモニク整数多項式の根であることに加え、二次体の共役と 4 を法とする偶奇判定で半整数の可能性を除く。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

■ 【第 6 問】 ■

(1) $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続な関数とする。このとき、

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad a \leq c \leq b$$

となる c が存在することを示せ。

(2) $y = \sin x$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分と $y = 1$ および y 軸が囲む図形を、 y 軸のまわりに回転して得られる立体を考える。この立体を y 軸に垂直な $n-1$ 個の平面によって各部分の体積が等しくなるように n 個に分割するとき、 $y = 1$ に最も近い平面の y 座標を y_n とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - y_n)$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) 連続関数の最小値・最大値と中間値の定理を用いる。(2) 高さ y の断面積を $\pi(\arcsin y)^2$ とし、最上層の体積に (1) を適用して極限を求める。

【解答】

(1) f の区間 $[a, b]$ における最小値を m 、最大値を M とする。すると

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

従って

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

f は連続であり、最小値と最大値の間のすべての値をとるから、中間値の定理により

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

となる $c \in [a, b]$ が存在する。

(2) 高さ y における回転体の断面は、半径 $\arcsin y$ の円である。従って断面積は

$$A(y) = \pi(\arcsin y)^2$$

であり、全体の体積は

$$V = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy.$$

$y = \sin t$ と置いて部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy &= \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2. \end{aligned}$$

よって

$$V = \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right).$$

最上部の一層の体積は V/n だから

$$\frac{V}{n} = \int_{y_n}^1 A(y) dy.$$

右辺が 0 に近づくので $y_n \rightarrow 1$ である。(1) を区間 $[y_n, 1]$ の連続関数 A に適用すると、ある $c_n \in [y_n, 1]$ が存在して

$$\frac{V}{n} = (1 - y_n)A(c_n).$$

$c_n \rightarrow 1$ より

$$A(c_n) \rightarrow \pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^3}{4}.$$

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - y_n) = \frac{V}{\pi^3/4} = 1 - \frac{8}{\pi^2}.$$

▶ 解法 2

【方針】

(1) は平均値が最小値と最大値の間にあることを積分から示す。(2) では最上層の断面積を上下から挟み、積分の平均値の定理を直接使わずにはさみうちで極限を求める。

【解答】

(1) f の最小値を m 、最大値を M とすると

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

従って積分平均は $[m, M]$ に入る。連続関数はこの区間の全ての値を取るなので、ある $c \in [a, b]$ で

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

となる。

(2) 高さ y の断面積を

$$A(y) = \pi(\arcsin y)^2$$

とする。全体積は

$$V = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy = \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right).$$

最上層について

$$\frac{V}{n} = \int_{y_n}^1 A(y) dy.$$

A は増加するから

$$(1 - y_n)A(y_n) \leq \frac{V}{n} \leq (1 - y_n)A(1).$$

ここから $y_n \rightarrow 1$ であり、両端の断面積はともに

$$A(1) = \frac{\pi^3}{4}$$

へ収束する。はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - y_n) = \frac{V}{\pi^3/4} = 1 - \frac{8}{\pi^2}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7。第 (1) 問の積分平均値定理を第 (2) 問の最上層へ直接適用する構成であり、断面積の端点値も正確に評価する。答案では条件の必要性・十分性、端点または等号成立条件まで明記した。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。