

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 1999 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、 PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ.

第 2 問

平面上に2定点 A, B をとる. c は正の定数として, 平面上の点 P が $|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$ を満たすとき, 点 P の軌跡を求めよ.

第 3 問

- (1) $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0 , b_0 , a_1 , b_1 について, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{b_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{a_1^2}{b_0^2 + 1} > \frac{a_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{b_1^2}{b_0^2 + 1}$$

- (2) n 個の自然数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ は互いに相異なり, $1 \leq x_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$) を満たしているとする. このとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} > n - \frac{8}{5}$$

第 4 問

複素平面上で、 $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数を α, β, γ とする. α, β, γ が次の 3 条件を満たすとする.

1. $\triangle ABC$ は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である
2. $\alpha + \beta + \gamma = 3$
3. $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で、虚数部分は正

このとき、次の間に答えよ.

- (1) $z = \alpha - 1$ において、 β と γ を z を使って表せ.
- (2) α, β, γ の偏角を求めよ. ただし $0^\circ \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg \gamma < 360^\circ$ とする.

第 5 問

以下の問に答えよ．ただし $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい．

- (1) 有理数 p , q , r について, $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ ならば, $p = q = r = 0$ であることを示せ.
- (2) 実数係数の 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ について, $f(1)$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ.

第 6 問

x , y は t を媒介変数として, 次のように表示されているものとする.

$$x = \frac{3t - t^2}{t + 1}$$

$$y = \frac{3t^2 - t^3}{t + 1}$$

変数 t が $0 \leq t \leq 3$ を動くとき, x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ. さらに, この (x, y) が描くグラフが囲む図形と領域 $y \geq x$ の共通部分の面積を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)