

京都大学 1999 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、 PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 点を $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ と置き、 $p < q$ としてよい。弦 PQ の方程式を出すと、放物線との差が $(x-p)(q-x)$ になり、囲まれる面積は端点差 $q-p$ だけで決まる。面積が 1 であることから $q-p = \sqrt[3]{6}$ を固定し、中点 $R(X, Y)$ について $Y - X^2 = (q-p)^2/4$ を計算すれば軌跡の方程式が得られる。

【解答】

2 点を $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ とおく。2 点の順序を入れ替えても線分 PQ は同じなので、 $p < q$ としてよい。

直線 PQ の傾きは $\frac{q^2 - p^2}{q - p} = p + q$ である。よって直線 PQ は $y - p^2 = (p + q)(x - p)$ すなわち $y = (p + q)x - pq$ である。 $p < x < q$ では、直線 PQ は放物線 $y = x^2$ より上にある。実際、差は $(p + q)x - pq - x^2 = -(x^2 - (p + q)x + pq) = (x - p)(q - x)$ であり、これは $p < x < q$ で正である。したがって囲まれる部分の面積は

$$\int_p^q \{(p + q)x - pq - x^2\} dx = \int_p^q (x - p)(q - x) dx$$

である。ここで $u = x - p$ とおくと、 $0 \leq u \leq q - p$ であり

$$\begin{aligned} \int_p^q (x - p)(q - x) dx &= \int_0^{q-p} u\{(q - p) - u\} du \\ &= \left[\frac{(q - p)u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^{q-p} = \frac{(q - p)^3}{6} \end{aligned}$$

となる。これが常に 1 であるから $\frac{(q - p)^3}{6} = 1$ すなわち $q - p = \sqrt[3]{6}$ である。

中点 R の座標を (X, Y) とすると $X = \frac{p + q}{2}, Y = \frac{p^2 + q^2}{2}$ である。ここで $\frac{p^2 + q^2}{2} = \left(\frac{p + q}{2}\right)^2 + \frac{(q - p)^2}{4}$ だから $Y = X^2 + \frac{(q - p)^2}{4}$ である。 $q - p = \sqrt[3]{6}$ を代入して $Y = X^2 + \frac{(\sqrt[3]{6})^2}{4} = X^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$ を得る。したがって求める図形の方程式は $y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

中点の横座標 X と弦の端点間隔 d を最初に導入する。弦と放物線の差が、中心 X に関して対称な二次式 $d^2/4 - u^2$ になるので、面積と中点の高さを同じ 2 変数で一度に計算する。

【解答】

中点 R の x 座標を X 、2 点の横座標の差を $d > 0$ とすると

$$P = \left(X - \frac{d}{2}, \left(X - \frac{d}{2} \right)^2 \right), \quad Q = \left(X + \frac{d}{2}, \left(X + \frac{d}{2} \right)^2 \right).$$

$x = X + u$ と置けば、弦 PQ と放物線の縦の差は

$$\frac{d^2}{4} - u^2 \quad \left(-\frac{d}{2} \leq u \leq \frac{d}{2} \right)$$

である。従って面積は

$$\int_{-d/2}^{d/2} \left(\frac{d^2}{4} - u^2 \right) du = \frac{d^3}{6}.$$

これが 1 だから $d = \sqrt[3]{6}$ である。

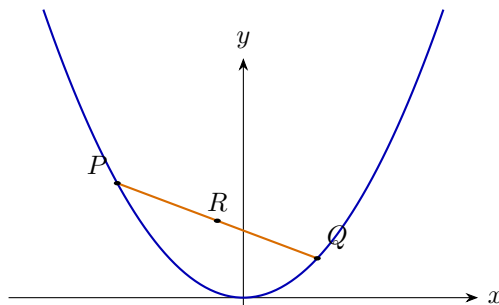
中点の y 座標を Y とすると

$$Y = \frac{(X - d/2)^2 + (X + d/2)^2}{2} = X^2 + \frac{d^2}{4}.$$

よって軌跡は

$$y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

である。任意の実数 X に対して上の P, Q を取れるので、方程式上の全ての点の実現する。



【総評】 難度 5、計算量 5。放物線の弦で切り取る面積が端点差の 3 乗に比例することを、その場で積分して確認する問題である。想定時間は 15 分程度。弦の式を出した後、直線と放物線の差を $(x - p)(q - x)$ に因数分解できると計算が安定する。軌跡では、 $p + q$ は自由に動くが $q - p$ は面積条件で固定される、という役割分担を意識したい。最後の定数は $(\sqrt[3]{6})^2/4 = \sqrt[3]{36}/4$ であり、平方と立方根の整理ミスに注意する。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 2 問】

平面上に 2 定点 A, B をとる. c は正の定数として, 平面上の点 P が $|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$ を満たすとき, 点 P の軌跡を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$PA = r_1, PB = r_2, AB = d$ とおき, 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を余弦定理で距離だけの式に直す. すると与式は $(r_1 + r_2)^2 = d^2 + 2c$ となり, $PA + PB$ が一定であることが分かる. $c > 0$ なのでこの一定値は AB より大きく, $A \neq B$ なら 2 点 A, B を焦点とする楕円になる. $A = B$ の可能性も考えるなら, 同じ式から円として記述できる.

【解答】

$PA = r_1, PB = r_2, AB = d$ とおく. 三角形 APB に余弦定理を用いると $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ である. したがって $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2}$ となる.

これを条件

$$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$$

に代入すると $r_1 r_2 + \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2} = c$ である. 両辺を 2 倍して整理すると $r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 = d^2 + 2c$ すなわち $(r_1 + r_2)^2 = d^2 + 2c$ である. $r_1 + r_2 \geq 0$ だから $PA + PB = r_1 + r_2 = \sqrt{d^2 + 2c}$ である.

ここで $c > 0$ より $\sqrt{d^2 + 2c} > d = AB$ である. したがって, $A \neq B$ のとき, 点 P の軌跡は 2 点 A, B を焦点とし, 距離の和が $\sqrt{AB^2 + 2c}$ に等しい楕円である. すなわち $PA + PB = \sqrt{AB^2 + 2c}$ を満たす楕円である.

なお, もし $A = B$ の場合には $PA = PB$ であり, 条件は $PA^2 + PA^2 = c$ となるので, 軌跡は点 A を中心とする半径 $\sqrt{c/2}$ の円である. これは焦点が一致した場合の特別な形と見られる.

▶ 解法 2

【方針】

焦点を座標軸上に置き, 距離の和が一定であることから楕円の標準形まで導く. 単に「楕円」と命名するだけでなく, 長半径・短半径を AB, c で表して軌跡を可視化する.

【解答】

$AB = d$ とし, 座標を

$$A = (-d/2, 0), \quad B = (d/2, 0)$$

と取る. 条件は距離の和

$$PA + PB = 2a, \quad 2a = \sqrt{d^2 + 2c}$$

と同値である. $P = (x, y)$ として

$$\sqrt{(x + d/2)^2 + y^2} + \sqrt{(x - d/2)^2 + y^2} = 2a$$

を 2 回平方して整理すると

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2/4} = 1.$$

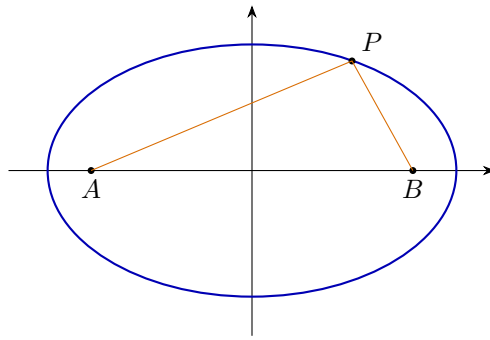
$c > 0$ より

$$a^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{c}{2} > 0.$$

従って $A \neq B$ のとき, 軌跡は焦点 A, B , 長半径

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + 2c},$$

短半径 $\sqrt{c/2}$ の楕円である. $A = B$ なら同じ式は半径 $\sqrt{c/2}$ の円になる.



【総評】 難度 5、計算量 4。内積を余弦定理で距離の式に変換すると、条件が距離和一定に変わる軌跡問題である。想定時間は 12 分程度。 $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角を直接扱うより、 $AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ と書くと一気に整理できる。 $c > 0$ により距離和が AB より大きいので、空集合や線分上だけの退化ではなく楕円になる。定点が一致する特別な場合には円になることも押さえておくことと記述が厳密である。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 3 問】

- (1) $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0, b_0, a_1, b_1 について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{a_1^2}{b_0^2 + 1} > \frac{a_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{b_1^2}{b_0^2 + 1}$$

- (2) n 個の自然数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ は互いに相異なり、 $1 \leq x_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$) を満たしているとする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} > n - \frac{8}{5}$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は左辺から右辺を引き、 $(b_1^2 - a_1^2)\{1/(a_0^2 + 1) - 1/(b_0^2 + 1)\}$ という正の積にする。(2) では $x_1, \dots, x_n$ が $1, 2, \dots, n$ の並べ替えであることを使う。(1) は「小さい添字に大きい値がある反転」を入れ替えると和が小さくなることを示しているので、最小は $x_k = k$ のときである。最後は

$$\sum 1/(k^2 + 1)$$

を $k \geq 3$ で $1/(k(k-1))$ より小さく評価し、望む下限を得る。

【解答】

- (1) 示すべき不等式の左辺から右辺を引く。すると

$$\begin{aligned} & \frac{b_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{a_1^2}{b_0^2 + 1} - \frac{a_1^2}{a_0^2 + 1} - \frac{b_1^2}{b_0^2 + 1} \\ &= \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_0^2 + 1} - \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_0^2 + 1} = (b_1^2 - a_1^2) \left(\frac{1}{a_0^2 + 1} - \frac{1}{b_0^2 + 1} \right) \text{ である。} a_1 < b_1 \text{ かつ正の実数だから } b_1^2 - a_1^2 > 0 \text{ である。また} \\ & a_0 < b_0 \text{ かつ正の実数だから } a_0^2 + 1 < b_0^2 + 1 \text{ であり、したがって } \frac{1}{a_0^2 + 1} - \frac{1}{b_0^2 + 1} > 0 \text{ である。よって差は正であり、求} \\ & \text{める不等式が成り立つ。} \end{aligned}$$

- (2) $x_1, x_2, \dots, x_n$ は互いに相異なり、しかもすべて 1 以上 n 以下の自然数である。したがって、これらは $1, 2, \dots, n$ の並べ替えである。

和

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1}$$

を考える。もし $i < j$ なのに $x_i > x_j$ となっている箇所があれば、 $a_0 = i, b_0 = j, a_1 = x_j, b_1 = x_i$ として (1) を適用でき

る。すると

$$\frac{x_i^2}{i^2+1} + \frac{x_j^2}{j^2+1} > \frac{x_j^2}{i^2+1} + \frac{x_i^2}{j^2+1}$$

である。つまり、反転している 2 つを入れ替えると、和 S は小さくなる。

この操作を反転がなくなるまで繰り返すと、最終的には $x_k = k$ ($1 \leq k \leq n$) となる。したがって任意の並べ替えに対して

$$S \geq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2+1}$$

である。右辺は

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2+1}\right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1}$$

である。

あとは

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} < \frac{8}{5}$$

を示せばよい。 $k = 1, 2$ の項は $\frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ である。 $k \geq 3$ では $k^2+1 > k(k-1)$ だから $\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ である。よって $n \geq 3$ のとき

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2+1} < \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$$

である。 $n = 1, 2$ の場合はこの尾部がないので、以下の評価はさらに明らかに成り立つ。

したがってすべての n について

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6}{5} < \frac{8}{5}$$

である。以上より

$$S \geq n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

となる。すなわち

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) の交換則を帰納的に使い、値 n を第 n 項へ移すと和が増えないことから最小配置を構成する。残る逆数和は $1/(k^2 - 1)$ との比較で 2 項ずつ望遠的に消し、必要な定数より強い評価を得る。

【解答】

(1) 左辺から右辺を引くと

$$(b_1^2 - a_1^2) \left(\frac{1}{a_0^2 + 1} - \frac{1}{b_0^2 + 1} \right) > 0$$

である。両因子が正なので不等式が従う。

(2) $x_1, \dots, x_n$ は $1, \dots, n$ の順列である。値 n が位置 $j < n$ にあるとし、位置 n の値を $r < n$ とする。(1) を $a_0 = j, b_0 = n, a_1 = r, b_1 = n$ に適用すると、 n, r を交換した方が

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1}$$

は小さくなる。これを繰り返して $x_n = n$ とし、同じ操作を $n-1, n-2, \dots$ に施すと

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 + 1} = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 1}.$$

$k \geq 2$ では

$$\frac{1}{k^2 + 1} < \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right).$$

従って

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 1} < \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} < \frac{8}{5}.$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} > n - \frac{8}{5}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。誘導付きの並べ替え不等式で、(1) は単なる前座ではなく、(2) で反転を解消するための交換法そのものである。想定時間は 20 分程度。 x_k が $1, 2, \dots, n$ の並べ替えであることを明記し、反転 $i < j, x_i > x_j$ を入れ替えると和が小さくなる、と説明できれば最小配置 $x_k = k$ が自然に出る。最後の分数和は厳密な値を求める必要はなく、 $k \geq 3$ で望ましい粗さに評価するのが試験的には効率的である。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 4 問】

複素平面上で、 $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数を α, β, γ とする。 α, β, γ が次の 3 条件を満たすとする。

1. $\triangle ABC$ は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である
2. $\alpha + \beta + \gamma = 3$
3. $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で、虚数部分は正

このとき、次の問に答えよ。

- (1) $z = \alpha - 1$ において、 β と γ を z を使って表せ。
- (2) α, β, γ の偏角を求めよ。ただし $0^\circ \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg \gamma < 360^\circ$ とする。

▶ 解法 1

【方針】

正三角形の重心は 3 頂点の平均であり、条件 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ から中心は複素数 1 である。 $z = \alpha - 1$ とおくと、辺の長さが $\sqrt{3}$ であることから $|z| = 1$ となり、他の頂点は 1 を中心に z を $120^\circ, 240^\circ$ 回転した点で表せる。積は $(1+z)(1+\omega z)(1+\omega^2 z) = 1+z^3$ と簡単になり、絶対値 1 かつ虚部正という条件から z^3 の偏角を 120° に決める。最後に 3 通りの z を調べ、指定された偏角順序に合うものを選ぶ。

【解答】

(1) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおく。これは偏角 120° の複素数であり、 $\omega^3 = 1, 1 + \omega + \omega^2 = 0$ を満たす。

条件 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ より、三角形の重心は $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 1$ である。正三角形では重心と中心が一致するので、3 頂点は複素数 1 を中心とする円周上にある。 $z = \alpha - 1$ とおく。正三角形の中心から各頂点までの距離を r とすると、辺の長さは $|z - \omega z| = |1 - \omega||z| = \sqrt{3}|z|$ である。これが $\sqrt{3}$ に等しいので $|z| = 1$ である。したがって、残りの 2 頂点は z を中心のまわりに $120^\circ, 240^\circ$ 回転した点であり、順序を除いて $\{\beta, \gamma\} = \{1 + \omega z, 1 + \omega^2 z\}$ である。後の偏角順序に合わせて、必要なら β と γ を入れ替える。

(2) (1) の表し方で積を計算する。 $1 + \omega + \omega^2 = 0, \omega^3 = 1$ より $\alpha\beta\gamma = (1+z)(1+\omega z)(1+\omega^2 z) = 1+z^3$ である。 $|z| = 1$ なので、 z^3 も単位円上にある。 $z^3 = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと $\alpha\beta\gamma = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ である。これの絶対値が 1 であるから $|1 + z^3| = 1$ である。単位円上の点 z^3 について

$$|1 + \cos \theta + i \sin \theta|^2 = (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 2 + 2 \cos \theta$$

だから $2 + 2 \cos \theta = 1$ すなわち $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ である。さらに $\alpha\beta\gamma$ の虚数部分は正なので $\sin \theta > 0$ である。よって $\theta = 120^\circ$ であり、 $z^3 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ である。

したがって z の偏角は $40^\circ, 160^\circ, 280^\circ$ のいずれかである。それぞれについて、 $1 + e^{i\phi}$ の偏角を調べる。 z の偏角が 40° のとき、3 頂点は $1 + e^{40^\circ i}, 1 + e^{160^\circ i}, 1 + e^{280^\circ i}$ である。ここで $1 + e^{i\phi} = 2 \cos \frac{\phi}{2} e^{i\phi/2}$ を用いると、偏角はそれぞれ $20^\circ, 80^\circ, 320^\circ$ である。これは指定された順序 $0^\circ \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg \gamma < 360^\circ$ に合う。

一方、 z の偏角が 160° または 280° のときは、 $\alpha = 1 + z$ の偏角がそれぞれ $80^\circ, 320^\circ$ となり、3 つの偏角を α, β, γ の順に非減少に並べることができない。したがって条件に合うのは z の偏角が 40° の場合だけである。

よって

$$\arg \alpha = 20^\circ, \quad \arg \beta = 80^\circ, \quad \arg \gamma = 320^\circ$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

正三角形の中心を 1 へ平行移動し、3 頂点を単位円上の 120 度間隔の点として扱う。積 $1 + z^3$ の条件を単位円どうしの交点として図形的に読み、候補角を順序条件で選別する。

【解答】

(1) $\omega = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ とする。重心は 1 で、正三角形の外接半径は 1 だから、 $z = \alpha - 1$ と置けば $|z| = 1$ で

$$\beta = 1 + \omega z, \quad \gamma = 1 + \omega^2 z$$

とできる。ただし向きが反対なら β, γ を交換する。

(2)

$$\alpha\beta\gamma = (1+z)(1+\omega z)(1+\omega^2 z) = 1 + z^3.$$

$|z^3| = 1$ かつ $|1 + z^3| = 1$ なので、複素平面では z^3 は中心 0 と -1、半径 1 の 2 円の交点にある。虚部が正である方を選ぶと

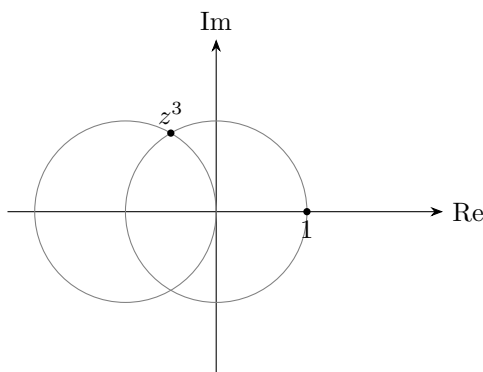
$$\arg z^3 = 120^\circ.$$

従って

$$\arg z = 40^\circ, 160^\circ, 280^\circ.$$

$\arg(1 + e^{i\phi})$ を各候補で調べ、指定された α, β, γ の順序を満たすのは $\arg z = 40^\circ$ だけである。よって

$$\arg \alpha = 20^\circ, \quad \arg \beta = 80^\circ, \quad \arg \gamma = 320^\circ.$$



【総評】 難度 7、計算量 6。正三角形の中心が 1 であることを見抜き、3 頂点を $1+z, 1+\omega z, 1+\omega^2 z$ と表すのが核心である。想定時間は 25 分程度。辺の長さ $\sqrt{3}$ から $|z| = 1$ を出す確認を省かないこと。積が $1 + z^3$ になる計算はこの問題の山場で、そこから $|1 + z^3| = 1$ と虚部正により z^3 の偏角が 120° と決まる。最後は 3 つの候補を実際に偏角へ戻し、指定された α, β, γ の順序で選別する必要がある。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第 5 問】

以下の間に答えよ。ただし $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい。

- (1) 有理数 p, q, r について, $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ ならば, $p = q = r = 0$ であることを示せ。
- (2) 実数係数の 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ について, $f(1)$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ から、係数の一部が非零なら $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ のいずれかが有理数になってしまうことを場合分けで示す。(2) は 3 つの値がすべて有理数だと仮定する。差 $f(1 + \sqrt{2}) - f(1)$ から $a = -2 + q\sqrt{2}$ という形を得て、差 $f(\sqrt{3}) - f(1)$ から $a = s(\sqrt{3} + 1)/2$ という形も得る。両者を等置すると、有理係数の $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ の一次関係ができ、(1) に反する。

【解答】

(1) 有理数 p, q, r が $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ を満たすとする。

まず $p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ と仮定する。このとき $p + q\sqrt{2} = -r\sqrt{3}$ と書ける。両辺を 2 乗すると $p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2} = 3r^2$ である。したがって $2pq\sqrt{2} = 3r^2 - p^2 - 2q^2$ となる。右辺は有理数であり、 $2pq \neq 0$ だから $\sqrt{2}$ が有理数になってしまう。これは仮定に反する。よって $p = 0$ または $q = 0$ である。 $p = 0$ の場合、 $q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ である。もし $r \neq 0$ かつ $q \neq 0$ なら、両辺に $\sqrt{2}$ をかけて $2q + r\sqrt{6} = 0$ となり、 $\sqrt{6}$ が有理数になってしまう。これは矛盾である。したがって $q = 0$ または $r = 0$ であり、どちらの場合も元の式から残りの係数も 0 になる。よって $q = r = 0$ である。 $q = 0$ の場合、 $p + r\sqrt{3} = 0$ である。もし $r \neq 0$ なら $\sqrt{3} = -p/r$ が有理数になり矛盾する。したがって $r = 0$ 、さらに $p = 0$ である。

以上より、必ず $p = q = r = 0$ である。

(2) 背理法で示す。3 つの値 $f(1)$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ がすべて有理数であると仮定する。

まず $f(x) = x^2 + ax + b$ だから $f(1) = 1 + a + b$ である。また $f(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^2 + a(1 + \sqrt{2}) + b$ であり、差を取ると $f(1 + \sqrt{2}) - f(1) = 2 + (a + 2)\sqrt{2}$ である。左辺は有理数なので、ある有理数 u を用いて $(a + 2)\sqrt{2} = u$ と書ける。したがって $a + 2 = \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{u\sqrt{2}}{2}$ である。 $q = u/2$ とおけば q は有理数であり、 $a = -2 + q\sqrt{2}$ と書ける。

次に $f(\sqrt{3}) - f(1) = 2 + a(\sqrt{3} - 1)$ である。これも有理数なので、ある有理数 s を用いて $a(\sqrt{3} - 1) = s$ と書ける。よって $a = \frac{s}{\sqrt{3} - 1} = \frac{s(\sqrt{3} + 1)}{2}$ である。

2 つの a の表示を等置すると $-2 + q\sqrt{2} = \frac{s(\sqrt{3} + 1)}{2}$ である。両辺を 2 倍して整理すると $(-4 - s) + 2q\sqrt{2} - s\sqrt{3} = 0$ である。ここで $-4 - s$, $2q$, $-s$ はすべて有理数であるから、(1) より $-4 - s = 0$, $2q = 0$, $-s = 0$ でなければならない。しかし $-4 - s = 0$ と $-s = 0$ は同時に成り立たない。これは矛盾である。

したがって、3 つの値がすべて有理数であることは不可能であり、 $f(1)$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であるが示された。

▶ 解法 2

【方針】

3つの値が全て有理数と仮定し、差から $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ を得る。(1)により両体の共通部分が有理数だけであることを示し、 $a = -2$ と $a = 0$ が同時に必要になる矛盾を導く。

【解答】

(1)

$$p + q\sqrt{2} = r(-\sqrt{3}).$$

$r = 0$ なら $\sqrt{2}$ の無理性から $p = q = 0$ 。 $r \neq 0$ なら平方して

$$p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2} = 3r^2.$$

$pq \neq 0$ なら $\sqrt{2}$ が有理数となるので $pq = 0$ 。 $p = 0$ なら $\sqrt{6}$ 、 $q = 0$ なら $\sqrt{3}$ が有理数となるため、結局 $p = q = r = 0$ である。

(2) 3値が全て有理数と仮定する。差を取ると

$$f(1 + \sqrt{2}) - f(1) = 2 + (a + 2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q},$$

$$f(\sqrt{3}) - f(1) = 2 + a(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{Q}.$$

従って

$$a = -2 + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{3}$$

となる有理数 q, r, s が存在する。(1)より

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$$

だから a は有理数である。すると $(a + 2)\sqrt{2}$ が有理数であるため $a = -2$ 、また $a(\sqrt{3} - 1)$ が有理数であるため $a = 0$ が必要となり矛盾する。従って少なくとも1つは無理数である。

【総評】 難度6、計算量5。無理数の一次独立性を証明し、それを2次式の値に適用する問題である。想定時間は20分程度。(1)では p, q, r の一部が0になる場合を雑に流すと穴が残るので、 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ の無理性のどれに反するかを明確にしたい。(2)では係数 a, b は実数であり、有理数とは限らない。そのため値そのものではなく、2つの値の差を使って a の形を2通りに絞るのが決定的である。最後の矛盾は(1)の使いどころなので、係数が有理数であることを必ず確認する。主解法と第2解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。

【第6問】

x, y は t を媒介変数として、次のように表示されているものとする。

$$x = \frac{3t - t^2}{t + 1}$$

$$y = \frac{3t^2 - t^3}{t + 1}$$

変数 t が $0 \leq t \leq 3$ を動くとき、 x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ。さらに、この (x, y) が描くグラフが囲む図形と領域 $y \geq x$ の共通部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず $x = t(3 - t)/(t + 1)$, $y = tx$ と整理する。 x と y の範囲はそれぞれ微分して増減表を作ればよい。曲線は $t = 0$ と $t = 3$ で原点に戻る閉じたループを作り、 $x \geq 0$ かつ $y = tx$ なので $y \geq x$ は $t \geq 1$ に対応する。共通部分の面積は、曲線の $1 \leq t \leq 3$ の部分と直線 $y = x$ で囲まれる面積であり、パラメータ表示の面積公式

$$\frac{1}{2} \int (xy' - yx') dt$$

を使う。ここでは $y = tx$ から被積分関数が x^2 に簡単化する。

【解答】

与えられた式は $x = \frac{t(3-t)}{t+1}$, $y = \frac{t^2(3-t)}{t+1} = tx$ と書ける。以下、 $0 \leq t \leq 3$ で考える。

まず x の範囲を求める。微分すると

$$x' = \frac{(3-2t)(t+1) - (3t-t^2)}{(t+1)^2} = \frac{-t^2-2t+3}{(t+1)^2} = -\frac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$$

である。 $0 \leq t \leq 3$ では $t+3 > 0$, $(t+1)^2 > 0$ なので、 x は $0 \leq t < 1$ で増加し、 $1 < t \leq 3$ で減少する。端点と極大値は $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x(3) = 0$ である。したがって $0 \leq x \leq 1$ である。

次に y の範囲を求める。 $y = \frac{3t^2-t^3}{t+1}$ だから

$$y' = \frac{(6t-3t^2)(t+1) - (3t^2-t^3)}{(t+1)^2} = \frac{6t-2t^3}{(t+1)^2} = \frac{2t(3-t^2)}{(t+1)^2}$$

である。したがって y は $0 < t < \sqrt{3}$ で増加し、 $\sqrt{3} < t < 3$ で減少する。また $y(0) = 0$, $y(3) = 0$ であり、最大値は $y(\sqrt{3}) = \frac{3(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$ である。これを整理すると $\frac{3(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} = 3(2\sqrt{3}-3) = 6\sqrt{3}-9$ である。よって $0 \leq y \leq 6\sqrt{3}-9$ である。

次に面積を求める。 $0 \leq t \leq 3$ では $x = \frac{t(3-t)}{t+1} \geq 0$ であり、 $y = tx$ である。したがって $y \geq x$ は $tx \geq x$ と同値である。 $x > 0$ の部分では $t \geq 1$ であり、端点を含めても、求める共通部分は曲線の $1 \leq t \leq 3$ の部分と直線 $y = x$ で囲まれる部分である。

パラメータ表示された閉曲線の面積は

$$\frac{1}{2} \int (xy' - yx') dt$$

で求められる。ここでは $y = tx$ なので $y' = x + tx'$ であり、 $xy' - yx' = x(x + tx') - txx' = x^2$ となる。よって求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dt = \frac{1}{2} \int_1^3 \left\{ \frac{t(3-t)}{t+1} \right\}^2 dt$$

である。すなわち

$$S = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{t^2(t-3)^2}{(t+1)^2} dt$$

である。

被積分関数を割り算で整理すると

$$\frac{1}{2} \frac{t^2(t-3)^2}{(t+1)^2} = \frac{t^2}{2} - 4t + 12 - \frac{20}{t+1} + \frac{8}{(t+1)^2}$$

である。したがって $S = \left[\frac{t^3}{6} - 2t^2 + 12t - 20 \log(t+1) - \frac{8}{t+1} \right]_1^3$ である。上端では $\frac{27}{6} - 18 + 36 - 20 \log 4 - 2 = \frac{41}{2} - 20 \log 4$ であり、下端では $\frac{1}{6} - 2 + 12 - 20 \log 2 - 4 = \frac{37}{6} - 20 \log 2$ である。よって $S = \frac{41}{2} - \frac{37}{6} - 20 \log 4 + 20 \log 2 = \frac{43}{3} - 20 \log 2$ である。したがって求める面積は $\frac{43}{3} - 20 \log 2$ である。

▶ 解法 2

【方針】

x の最大値は平方完成、 y の最大値は最大候補との差の因数分解で求める。面積は曲線と直線 $y = x$ の縦の差を x で積分し、パラメータ積分と部分積分で主解法のア積公式へ帰着する。

【解答】

$$x = 1 - \frac{(t-1)^2}{t+1}.$$

$0 \leq t \leq 3$ では $x \geq 0$ であり、上式から $x \leq 1$ 。端点と $t = 1$ で両端を取るから

$$0 \leq x \leq 1.$$

$M = 6\sqrt{3} - 9$ と置くと

$$M - y = \frac{(t - \sqrt{3})^2(t + 2\sqrt{3} - 3)}{t + 1} \geq 0.$$

$t = \sqrt{3}$ で等号、端点で $y = 0$ だから

$$0 \leq y \leq 6\sqrt{3} - 9.$$

$y = tx$ かつ $x \geq 0$ より、領域 $y \geq x$ にある曲線部分は $1 \leq t \leq 3$ である。縦の差で面積を取ると、 x はこの区間で 1 から 0 へ減少するので

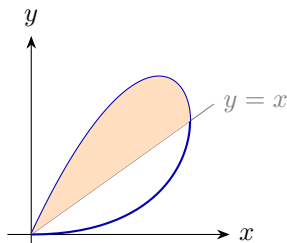
$$S = - \int_1^3 (y - x)x' dt = - \int_1^3 (t - 1)xx' dt.$$

部分積分により端点項は 0 で

$$S = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dt.$$

従って

$$S = \frac{1}{2} \int_1^3 \left\{ \frac{t(3-t)}{t+1} \right\}^2 dt = \frac{43}{3} - 20 \log 2.$$



【総評】 難度 7、計算量 8。パラメータ曲線の増減と面積をまとめて処理する重めの計算問題である。想定時間は 30 分程度。最初に $y = tx$ と見抜くと、 $y \geq x$ が $t \geq 1$ に対応し、面積積分でも $xy' - yx' = x^2$ と大きく簡単になる。 x, y の範囲では端点 $t = 0, 3$ の値と内部の最大点を別々に確認すること。面積計算は最後の有理関数の割り算と対数項の整理でミスが出やすいので、上端下端を分けて評価すると安全である。主解法と第 2 解法を別々に再計算し、条件範囲、端点、等号成立条件まで照合した。