

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 2000 年 度 文 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

複素数 α は $|\alpha| = 1$ を満たしている. このとき, $|\alpha^m + \alpha^{-m}| > 1$ となる自然数 m が存在することを示せ.

第 2 問

実数 x, y が $x \geq y \geq 1$ を満たすとき、次の不等式が成立することを示せ.

$$(x + y - 1) \log_2(x + y) \geq (x - 1) \log_2 x + (y - 1) \log_2 y + y$$

第 3 問

xy 平面上の点で x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点という.

- (1) 格子点を頂点とする三角形の面積は $\frac{1}{2}$ 以上であることを示せ.
- (2) 格子点を頂点とする凸四角形の面積が 1 であるとき, この四角形は平行四辺形であることを示せ.

第 4 問

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は次の条件 (イ), (ロ) を満たしている.

(イ) $y = f(x)$ のグラフは, 点 $(0, 1)$ に関して点対称である.

(ロ) $y = f(x)$ は相異なる 2 つの極値をもち, 2 つの極値の差の絶対値は 4 に等しい.

このとき

(1) $y = f(x)$ のグラフは x 軸と相異なる 3 点で交わることを示せ.

(2) (1) における 3 点の x 座標を α, β, γ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$ とする) とおくとき, $f\left(\frac{-\beta - \gamma}{2}\right) > 2$ を示せ.

第 5 問

xy 平面において座標軸に平行な直線 $x = m$ および $y = n$ ($m = 0, 1, 2, n = 0, 1, 2$) で表される道路網がある. 原点 $(0, 0)$ からみて x 軸の正の方向が東, y 軸の正の方向が北であるものとする. A と B の 2 人が同時にそれぞれ $(2, 2)$, $(0, 0)$ から出発して道路を進む. A の速さと B の速さは等しく, 両者は各交差点において独立に進行方向を次のように決める.

A は確率 p で南, 確率 $1 - p$ で西に進む.

B は確率 q で北, 確率 $1 - q$ で東に進む.

ただし, $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ とする. このとき

(1) 2 人が出会う確率 $f(p, q)$ を求めよ.

(2) q が $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ の範囲で与えられたとき, $f(p, q)$ が最大となる p の値, およびその最大値 $M(q)$ を q を用いて表せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)