

京都大学 2000 年度 文系（後期）

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

複素数 α は $|\alpha| = 1$ を満たしている. このとき, $|\alpha^m + \alpha^{-m}| > 1$ となる自然数 m が存在することを示せ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ とおき, $|\alpha^m + \alpha^{-m}| = 2|\cos m\theta|$ に帰着する. $m = 1, 2, 3$ のいずれかで必ず 1 を超えることを示す.

【解答】

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ とおく. このとき

$$\alpha^m + \alpha^{-m} = 2 \cos m\theta$$

であるから、示すべきことは

$$|\cos m\theta| > \frac{1}{2}$$

となる自然数 m の存在である。

まず $|\cos \theta| > 1/2$ なら $m = 1$ でよい。以下

$$|\cos \theta| \leq \frac{1}{2}$$

とする。余弦の絶対値は周期 π をもつので、 θ を π の整数倍だけ変えて

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

としてよい。この範囲では

$$-1 \leq \cos 2\theta \leq -\frac{1}{2}$$

である。従って、 $\theta \neq \pi/3, 2\pi/3$ なら

$$|\cos 2\theta| > \frac{1}{2}$$

なので $m = 2$ でよい。

残る $\theta = \pi/3, 2\pi/3$ の場合は

$$|\cos 3\theta| = 1 > \frac{1}{2}$$

であるから $m = 3$ でよい。

以上により、常に $m = 1, 2, 3$ のいずれかが条件を満たし、

$$|\alpha^m + \alpha^{-m}| > 1$$

となる自然数 m が存在する。

▶ 解法 2 (2 倍角・3 倍角の代数的分類)

【方針】

$\alpha = e^{i\theta}$ とおき、 $c = \cos \theta$ に対する $\cos 2\theta = 2c^2 - 1$ 、 $\cos 3\theta = 4c^3 - 3c$ を使う。 $m = 1, 2$ で条件を満たさない場合を代数的に絞ると、 $m = 3$ で必ず満たす。

【解答】

$|\alpha| = 1$ より、ある実数 θ を用いて

$$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$$

と書ける。このとき

$$\alpha^m + \alpha^{-m} = 2 \cos m\theta.$$

$c = \cos \theta$ とおく。

$|2c| > 1$ なら $m = 1$ でよい。以下 $|c| \leq 1/2$ とする。

$$\cos 2\theta = 2c^2 - 1$$

であるから、 $|2 \cos 2\theta| > 1$ なら $m = 2$ でよい。これも成り立たないと仮定すると

$$|2c^2 - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

$|c| \leq 1/2$ と合わせると

$$c^2 = \frac{1}{4}$$

でなければならない。実際、後者の不等式は $c^2 \geq 1/4$ を与える。

そこで 3 倍角の公式を使うと

$$\cos 3\theta = 4c^3 - 3c = c(4c^2 - 3) = -2c,$$

従って

$$|\alpha^3 + \alpha^{-3}| = 2|\cos 3\theta| = 4|c| = 2 > 1.$$

ゆえに $m = 1, 2, 3$ のいずれかが必ず条件を満たす。

【総評】 難度 5、計算量 3。極形式に直した後、等号となる端点を落とさず ($m=3$) で処理することが要点である。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

実数 x, y が $x \geq y \geq 1$ を満たすとき、次の不等式が成立することを示せ。

$$(x + y - 1) \log_2(x + y) \geq (x - 1) \log_2 x + (y - 1) \log_2 y + y$$

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

両辺に $\log 2$ を掛けた差を $F(x, y)$ とおく。固定した y に対して F が x の増加関数であることを示し、条件 $x \geq y$ から $x = y$ に帰着する。

【解答】

自然対数を $\log$ と書き、与えられた不等式の左辺から右辺を引いて $\log 2$ を掛けた量を

$$F(x, y) = (x + y - 1) \log(x + y) - (x - 1) \log x - (y - 1) \log y - y \log 2$$

とおく。

$y \geq 1$ を固定して x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \log(x + y) + 1 - \frac{1}{x + y} - \left(\log x + 1 - \frac{1}{x} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x + y} > 0. \end{aligned}$$

従って $F(x, y)$ は x について増加する。条件 $x \geq y$ より

$$F(x, y) \geq F(y, y).$$

ここで

$$\begin{aligned} F(y, y) &= (2y - 1) \log(2y) - 2(y - 1) \log y - y \log 2 \\ &= (y - 1) \log 2 + \log y \geq 0 \end{aligned}$$

である。最後の不等式は $y \geq 1$ による。

従って $F(x, y) \geq 0$ であり、 $\log 2 > 0$ だから、もとの不等式

$$(x + y - 1) \log_2(x + y) \geq (x - 1) \log_2 x + (y - 1) \log_2 y + y$$

が成立する。

▶ 解法 2 (比 x/y による二段階単調性)

【方針】

底を自然対数へ変え、 $x = uy$ ($u \geq 1$) と置く。差を y の一次関数として整理すると y について単調増加であることが分かる。そこで $y = 1$ に帰着し、残る 1 変数関数も微分で処理する。

【解答】

両辺の差に $\log_e 2$ を掛けたものを $F(x, y)$ とする。 $x = uy$ ($u \geq 1$) とおいて整理すると

$$\begin{aligned} F(uy, y) &= \log y + \{y(u + 1) - 1\} \log(u + 1) \\ &\quad - (uy - 1) \log u - y \log 2. \end{aligned}$$

u を固定して y で微分すれば

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y} + (u + 1) \log(u + 1) - u \log u - \log 2.$$

$u \geq 1, y \geq 1$ であり、

$$(u + 1) \log(u + 1) - u \log u - \log 2 \geq 0$$

である。実際、左辺は $u = 1$ で $\log 2 > 0$ 、その導関数は $\log(1 + 1/u) > 0$ である。従って $F(uy, y)$ は y について増加し、

$$F(uy, y) \geq F(u, 1).$$

$$G(u) = F(u, 1) = u \log(u + 1) - (u - 1) \log u - \log 2$$

とおくと $G(1) = 0$ であり、

$$G'(u) = \log \left(1 + \frac{1}{u} \right) + \frac{1}{u(u + 1)} > 0.$$

よって $G(u) \geq 0$ 、従って $F(x, y) \geq 0$ である。 $\log_e 2 > 0$ なので、これは元の底 2 の不等式と同値である。等号は $u = y = 1$ 、すなわち $x = y = 1$ のときに限る。

【総評】 難度 6、計算量 4。二変数のまま扱わず、大きい方の変数 (x) に関する単調性で対角線 ($x=y$) へ落とすと短く証明できる。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

xy 平面上の点で x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点という.

- (1) 格子点を頂点とする三角形の面積は $\frac{1}{2}$ 以上であることを示せ.
 (2) 格子点を頂点とする凸四角形の面積が 1 であるとき, この四角形は平行四辺形であることを示せ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) 座標による三角形の面積公式を用い、面積の 2 倍が 0 でない整数になることを示す。(2) 面積 $1/2$ の格子三角形が作る二つの整数ベクトルを格子の基底として、第四頂点の係数を決定する。

【解答】

(1) 三角形の頂点を

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3)$$

とする。その面積を T とすると

$$2T = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

右辺は整数であり、三角形は退化していないので 0 ではない。従って $2T \geq 1$ 、すなわち

$$T \geq \frac{1}{2}$$

である。

(2) 凸四角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D とする。対角線 AC は四角形を二つの格子三角形 ABC, ACD に分ける。(1) より各面積は $1/2$ 以上であり、和が 1 だから、どちらも面積 $1/2$ である。

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$$

とおき、向きを選んで $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$ とする。この行列式が 1 であるため、任意の格子ベクトルは $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の整数係数で一意に表せる。従って

$$\overrightarrow{AD} = r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \quad (r, s \text{ は整数})$$

と書ける。

三角形 ACD の面積が $1/2$ で、 D は辺 AC に関して B と反対側にあるから

$$\det(\mathbf{v}, \overrightarrow{AD}) = 1.$$

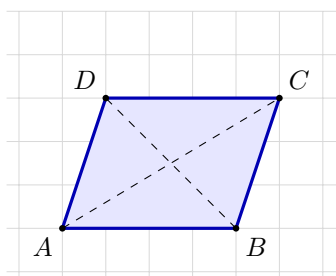
左辺は $-r$ なので $r = -1$ である。また対角線 BD で分けても二つの三角形の面積はともに $1/2$ だから、三角形 ABD について

$$\det(\mathbf{u}, \overrightarrow{AD}) = 1.$$

左辺は s なので $s = 1$ である。よって

$$\overrightarrow{AD} = -\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{BC}.$$

従って $AD \parallel BC$ かつ $AD = BC$ であり、この四角形は平行四辺形である。



▶ 解法 2 (単位面積の整数基底)

【方針】

(1) は 2 辺ベクトルの行列式が 0 でない整数であることを使う。(2) では 2 本の対角線で分割される 4 個の格子三角形がすべて面積 $1/2$ であるとし、面積 $1/2$ の三角形が作る整数基底で頂点を座標化する。

【解答】

(1) 3 点を A, B, C とする。面積は

$$[ABC] = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|.$$

行列式は整数であり、3 点が三角形を作るなら 0 ではない。従って絶対値は 1 以上で、面積は $1/2$ 以上である。

(2) 凸四角形の頂点を順に A, B, C, D とする。対角線 AC は四角形を $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ に分ける。各面積は (1) より少なくとも $1/2$ 、和は 1 だから、両方とも $1/2$ である。対角線 BD についても同様に

$$[ABD] = [BCD] = \frac{1}{2}.$$

A を原点とし

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{AC}$$

とおく。 $[ABC] = 1/2$ なので $|\det(\vec{u}, \vec{w})| = 1$ であり、 $\vec{u}, \vec{w}$ は整数格子の基底になる。従って

$$\overrightarrow{AD} = r\vec{u} + s\vec{w} \quad (r, s \in \mathbb{Z})$$

と一意に書ける。向きを $\det(\vec{u}, \vec{w}) = 1$ と選ぶ。凸性から D は有向辺 AC の B と反対側にあるので $r = -1$ 、また $[ABD] = 1/2$ より $|s| = 1$ 、凸性から $s = 1$ である。従って

$$\overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \vec{w}.$$

ゆえに

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + (-\vec{u} + \vec{w}) = \vec{w} = \overrightarrow{AC}.$$

すなわち対角線が互いの中点で交わるから、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

【総評】 難度 6、計算量 4。第 (2) 問では面積の下限だけでなく、等号により各三角形の行列式が (pm1) になることを使う。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は次の条件 (イ), (ロ) を満たしている.

(イ) $y = f(x)$ のグラフは, 点 $(0, 1)$ に関して点対称である.

(ロ) $y = f(x)$ は相異なる 2 つの極値をもち, 2 つの極値の差の絶対値は 4 に等しい.

このとき

(1) $y = f(x)$ のグラフは x 軸と相異なる 3 点で交わることを示せ.

(2) (1) における 3 点の x 座標を α, β, γ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$ とする) とおくと, $f\left(\frac{-\beta-\gamma}{2}\right) > 2$ を示せ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

点対称条件から偶数次項と定数項を決める. 極値差から残る係数を決定して $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とし, 増減と解の和を用いる.

【解答】

点 $(0, 1)$ に関して点対称であるから

$$f(x) + f(-x) = 2$$

がすべての x で成り立つ. 従って

$$2ax^2 + 2c = 2$$

より

$$a = 0, \quad c = 1.$$

よって $f(x) = x^3 + bx + 1$ である.

相異なる二つの極値をもつので $b < 0$ である.

$$s = \sqrt{-\frac{b}{3}} > 0$$

とおくと, 極値をとる点は $x = \pm s$ であり, $b = -3s^2$ だから

$$f(-s) = 1 + 2s^3, \quad f(s) = 1 - 2s^3.$$

極値の差が 4 なので

$$4s^3 = 4.$$

従って $s = 1, b = -3$ であり

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

と決まる.

(1)

$$f(-1) = 3 > 0, \quad f(1) = -1 < 0.$$

また $x \rightarrow -\infty$ で $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ で $f(x) \rightarrow \infty$ である. さらに f は

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, \infty)$$

でそれぞれ単調であるから, 各区間にちょうど一つずつ零点をもつ. 従ってグラフは x 軸と相異なる 3 点で交わる.

(2) 三つの零点を $\alpha < \beta < \gamma$ とする. x^2 の係数が 0 なので, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

従って

$$\frac{-\beta-\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

また

$$f(-2) = -1 < 0, \quad f(-1) = 3 > 0$$

より $-2 < \alpha < -1$ である。 $f(\alpha) = 0$ から

$$\alpha^3 = 3\alpha - 1$$

なので

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\alpha^3}{8} - \frac{3\alpha}{2} + 1 \\ &= \frac{7}{8} - \frac{9\alpha}{8} > 2, \end{aligned}$$

最後は $\alpha < -1$ を用いた。ゆえに

$$f\left(\frac{-\beta-\gamma}{2}\right) > 2$$

である。

▶ 解法 2 (根の区間と単調性)

【方針】

点対称条件と極値差から $f(x) = x^3 - 3x + 1$ を決める。(2) では根の関係から評価点を $\alpha/2$ と直し、 α の粗い範囲と f の単調性だけで 2 より大きいことを示す。

【解答】

(1) 点 $(0, 1)$ に関する点対称性は

$$f(-x) - 1 = -\{f(x) - 1\}$$

を意味する。従って $a = 0$, $c = 1$ であり

$$f(x) = x^3 + bx + 1.$$

相異なる 2 極値をもつため $b < 0$ である。 $b = -3r^2$ ($r > 0$) とおくと極値点は $x = \pm r$ で、極値の差は

$$f(-r) - f(r) = 4r^3.$$

これが 4 だから $r = 1$ 、従って

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

$$f(-2) = -1, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 3$$

より、中間値の定理から 3 つの区間 $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ に各 1 根をもち、3 次式なのでこれらが相異なる 3 根のすべてである。

(2) 根を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると、 x^2 の係数が 0 なので

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \frac{-\beta - \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

上で $-2 < \alpha < -1$ を得たから

$$-1 < \frac{\alpha}{2} < -\frac{1}{2}.$$

$f'(x) = 3(x^2 - 1) < 0$ なので f は $(-1, 1)$ で狭義単調減少する。従って

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) > f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{19}{8} > 2.$$

これが求める不等式である。

【総評】 難度 6、計算量 5。点対称条件と極値差だけで関数を一意に決めた後、最小の零点の粗い範囲 $((-2, -1))$ が第 (2) 問に十分である。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

xy 平面において座標軸に平行な直線 $x = m$ および $y = n$ ($m = 0, 1, 2, n = 0, 1, 2$) で表される道路網がある. 原点 $(0, 0)$ からみて x 軸の正の方向が東, y 軸の正の方向が北であるものとする. A と B の 2 人が同時にそれぞれ $(2, 2)$, $(0, 0)$ から出発して道路を進む. A の速さと B の速さは等しく, 両者は各交差点において独立に進行方向を次のように決める.

A は確率 p で南, 確率 $1 - p$ で西に進む.

B は確率 q で北, 確率 $1 - q$ で東に進む.

ただし, $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ とする. このとき

(1) 2 人が出会う確率 $f(p, q)$ を求めよ.

(2) q が $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ の範囲で与えられたとき, $f(p, q)$ が最大となる p の値, およびその最大値 $M(q)$ を q を用いて表せ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

二人の座標和を時刻で追い、出会うのは出発 2 単位時間後だけと分かる. その時点の南進回数と北進回数を二項分布で数え、得られた p の二次式を区間上で最大化する.

【解答】

(1) 出発後 t 単位時間において, A の座標和は $4 - t$ 、 B の座標和は t である. 従って二人が出会えるのは

$$4 - t = t$$

すなわち $t = 2$ のときだけである.

最初の 2 回で A が南へ進む回数を S 、 B が北へ進む回数を N とする. 時刻 2 での座標は

$$A = (S, 2 - S), \quad B = (2 - N, N)$$

なので、出会う条件は $S + N = 2$ である. 独立性より

$$\begin{aligned} f(p, q) &= (1 - p)^2 q^2 + \{2p(1 - p)\} \{2q(1 - q)\} + p^2 (1 - q)^2 \\ &= (1 - 6q + 6q^2)p^2 + (4q - 6q^2)p + q^2. \end{aligned}$$

(2) f を p の二次関数とみる. 端点では

$$f(0, q) = q^2, \quad f(1, q) = (1 - q)^2$$

であり, $0 \leq q \leq 1/2$ では $f(1, q) \geq f(0, q)$ である.

二次係数を

$$A = 1 - 6q + 6q^2$$

とする. 放物線が上に凸の場合、最大値は端点 $p = 1$ でとる. 下に凸の場合の頂点は

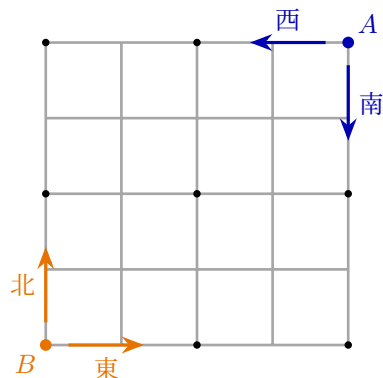
$$p_* = \frac{q(2 - 3q)}{6q - 6q^2 - 1}.$$

この頂点が区間 $[0, 1]$ に入るのは $q \geq 1/3$ のときである. 実際、 $p_* = 1$ は $q = 1/3$ で起こり、 $1/3 < q \leq 1/2$ では $0 < p_* < 1$ となる.

従って、最大にする p と最大値 $M(q)$ は

q の範囲	p	$M(q)$
$0 \leq q \leq \frac{1}{3}$	1	$(1 - q)^2$
$\frac{1}{3} < q \leq \frac{1}{2}$	$\frac{q(2 - 3q)}{6q - 6q^2 - 1}$	$\frac{3q^2(1 - q)^2}{6q - 6q^2 - 1}$

である. $q = 1/3$ では二つの式はいずれも $p = 1, M = 4/9$ を与える.



▶ 解法 2 (確率母関数と平方完成)

【方針】

2 歩後の南進回数・北進回数の確率母関数を作り、積の z^2 の係数として出会う確率を一度に取り出す。得られた p の二次式を平方完成し、頂点が区間に入る境界を調べる。

【解答】

(1) 時刻 t で A の座標和は $4 - t$ 、 B の座標和は t だから、出会う時刻は $t = 2$ だけである。

2 歩で A が南へ進む回数 S の確率母関数は

$$\{(1 - p) + pz\}^2,$$

B が北へ進む回数 N の確率母関数は

$$\{(1 - q) + qz\}^2$$

である。時刻 2 に出会う条件は $S + N = 2$ なので、積の z^2 の係数を取れば

$$\begin{aligned} f(p, q) &= (1 - p)^2 q^2 + 4p(1 - p)q(1 - q) + p^2(1 - q)^2 \\ &= (1 - 6q + 6q^2)p^2 + (4q - 6q^2)p + q^2. \end{aligned}$$

(2) $0 \leq q \leq 1/2$ とする。端点では

$$f(0, q) = q^2, \quad f(1, q) = (1 - q)^2,$$

従って大きい方は $p = 1$ である。二次係数が負のときの頂点は

$$p_* = \frac{q(2 - 3q)}{6q - 6q^2 - 1}.$$

平方完成、または $0 \leq p_* \leq 1$ を直接解くと、この頂点が区間に入るのは $1/3 \leq q \leq 1/2$ のときである。 $q = 1/3$ では $p_* = 1$ で端点と一致する。

従って

q の範囲	p	$M(q)$
$0 \leq q \leq \frac{1}{3}$	1	$(1 - q)^2$
$\frac{1}{3} < q \leq \frac{1}{2}$	$\frac{q(2 - 3q)}{6q - 6q^2 - 1}$	$\frac{3q^2(1 - q)^2}{6q - 6q^2 - 1}$

である。

【総評】 難度 8、計算量 7。出会う時刻が一意であることを先に示すと確率計算が有限になる。最大化では二次係数の符号だけでなく、頂点が $(0 \leq q \leq 1/2)$ に入る境界 ($q=1/3$) を確認する。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。