

入 学 試 験 問 題



数 学

京 都 大 学 2000 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

α, β, γ は互いに相異なる複素数とする.

- (1) 複素数平面上で $\frac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ.
- (2) 複素数 z が $(z-\alpha)(z-\beta) + (z-\beta)(z-\gamma) + (z-\gamma)(z-\alpha) = 0$ を満たしているとき, z は α, β, γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ. ただし, α, β, γ は同一直線上にはないものとする.

第 2 問

- (1) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$ が成立することを示せ.
- (2) 自然数 n に対して関数 $f_n(x) = n^2(x-1)e^{-nx}$ の $x \geq 0$ における最大値を M_n とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ を求めよ.

第 3 問

xy 平面上の点で x 座標、 y 座標がともに整数である点を格子点という． a, k は整数で $a \geq 2$ とし，直線 $L: ax + (a^2 + 1)y = k$ を考える．

- (1) 直線 L 上の格子点を 1 つ求めよ．
- (2) $k = a(a^2 + 1)$ のとき， $x > 0, y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点は存在しないことを示せ．
- (3) $k > a(a^2 + 1)$ ならば， $x > 0, y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点が存在することを示せ．

第 4 問

直方体 $ABCD - A'B'C'D'$ において、四角形 $ABCD$ と四角形 $A'B'C'D'$ は向かい合った 1 組の面であり、 AA' , BB' , CC' , DD' はこの直方体の辺である. ここで $AA' = 1$, $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$ とする. この直方体の内部を通る線分 AC' 上に点 P をとり、 P を通り AC' に垂直な平面による直方体の切り口を考える.

- (1) P が線分 AC' の中点であるとき、切り口は点 B' , D を通ることを示せ.
- (2) $AP = x$ であるとき、切り口の面積 $S(x)$ を求めよ.

第 5 問

0 と異なる複素数 α に対して数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \alpha^n + \alpha^{-n}$ で定める. すべての自然数 n について $|a_n| < 2$ が成立しているとする. このとき

- (1) $|\alpha| = 1$ が成立することを示せ.
- (2) $|a_m| > 1$ となる自然数 m が存在することを示せ.

第 6 問

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

で定める.

- (1) $y = f(x)$ の $x = 1$ における法線の方程式を求めよ.
- (2) (1) で求めた法線と x 軸および $y = f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)