

京都大学 2000 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

α, β, γ は互いに相異なる複素数とする.

- (1) 複素数平面上で $\frac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ.
- (2) 複素数 z が $(z-\alpha)(z-\beta) + (z-\beta)(z-\gamma) + (z-\gamma)(z-\alpha) = 0$ を満たしているとき, z は α, β, γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ. ただし, α, β, γ は同一直線上にはないものとする.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) 比の偏角と符号付き面積から、境界が直線 $\alpha\beta$ である半平面を特定する. (2) $p = (z-\beta)/(z-\alpha)$ と正規化し、方程式から各辺に対して z と反対頂点と同じ側にあることを循環的に示す.

【解答】

(1) α から β へ向かう有向直線を考える.

$$\operatorname{Im} \frac{z-\beta}{z-\alpha} = \frac{\operatorname{Im}\{(z-\beta)\overline{(z-\alpha)}\}}{|z-\alpha|^2}.$$

分母は正であり、分子の符号は点 z が有向直線 $\alpha\beta$ のどちら側にあるかを表す. 例えば $\alpha = 0, \beta = 1$ なら、この虚部は $z = x + iy$ に対して $y/(x^2 + y^2)$ である.

従って求める範囲は、直線 $\alpha\beta$ を境界とし、有向直線 $\alpha \rightarrow \beta$ の左側にある開半平面である. 境界線上は含まず、 $z = \alpha$ では式が定義されない.

(2)

$$p = \frac{z-\beta}{z-\alpha}, \quad q = \frac{z-\gamma}{z-\alpha}$$

とおく. 与えられた方程式を $(z-\alpha)^2$ で割ると

$$p + q + pq = 0$$

となるから

$$q = -\frac{p}{1+p}.$$

一方

$$\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{p-q}{1-q} = \frac{p(p+2)}{2p+1}.$$

ここで

$$\frac{p(p+2)}{2p+1} = \frac{1}{2}p + \frac{3}{4} - \frac{3}{4(2p+1)}$$

なので

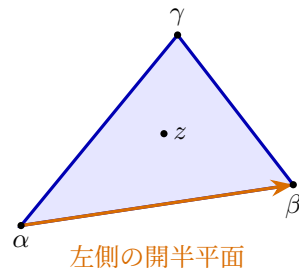
$$\operatorname{Im} \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \operatorname{Im} p \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2|2p+1|^2} \right).$$

従って

$$\operatorname{Im} \frac{z-\beta}{z-\alpha} \quad \text{と} \quad \operatorname{Im} \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$$

は同符号である. すなわち、点 z と点 γ は直線 $\alpha\beta$ の同じ側にある.

もしこの虚部が 0 なら p, q はともに実数となり、 α, β, γ が同一直線上に並ぶので仮定に反する. 従って同じ側という関係は厳密である. 同様の議論を (α, β, γ) について循環的に行くと、 z は三角形の各辺に対して反対頂点と同じ側にある. 従って z は三角形 $\alpha\beta\gamma$ の内部に存在する.



▶ 解法 2 (分離直線と逆数の和)

【方針】

(1) は比の虚部を有向面積として読む。(2) では方程式を 3 つの逆数の和に直す。もし z が三角形の外部または辺上なら、 z を通る分離直線を取り、3 つの逆数の実部が同符号になることから和が 0 になるのを排除する。

【解答】

(1)

$$\operatorname{Im} \frac{z - \beta}{z - \alpha} = \frac{\operatorname{Im}\{(z - \beta)\overline{(z - \alpha)}\}}{|z - \alpha|^2}.$$

分母は正で、分子は有向直線 $\alpha \rightarrow \beta$ と点 z が作る符号付き面積に対応する。従って求める範囲は、有向直線 $\alpha \rightarrow \beta$ の左側の開半平面である。

(2) 方程式を $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$ で割る。なお z が α, β, γ のいずれかなら元の式は 0 にならないので、この除算は可能である。すると

$$\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{z - \beta} + \frac{1}{z - \gamma} = 0.$$

z が三角形の内部にないと仮定する。凸な三角形と点 z の位置関係から、 z を通る直線で、 α, β, γ がすべて一方の開半平面に入り、少なくとも 1 点はその直線上にないものを取れる。平行移動と回転をして

$$\operatorname{Re}(\alpha - z), \operatorname{Re}(\beta - z), \operatorname{Re}(\gamma - z) \geq 0$$

で、少なくとも一つは正としてよい。

任意の $w \neq 0$ について

$$\operatorname{Re} \frac{1}{-w} = -\frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2}.$$

従って上の 3 つの逆数の実部はすべて 0 以下で、少なくとも一つは負である。その和の実部は負となり、0 にはなれない。これは逆数の和が 0 という式に反する。ゆえに z は三角形 $\alpha\beta\gamma$ の内部にある。

【総評】 難度 9、計算量 7。第 (2) 問では根を直接求めず、三角形内部の判定を「各辺について反対頂点と同じ側」に分解する。分母が 0 となる場合は元の相異性から排除される。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

(1) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$ が成立することを示せ.

(2) 自然数 n に対して関数 $f_n(x) = n^2(x-1)e^{-nx}$ の $x \geq 0$ における最大値を M_n とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ を求めよ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) 差を微分し, $e^x \geq 1 + x$ を使う. (2) 各 f_n を微分して最大点を求め, 得られた等比型級数を計算する.

【解答】

(1)

$$g(x) = e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2$$

とおく. $x \geq 0$ では基本不等式 $e^x \geq 1 + x$ より

$$g'(x) = e^x - x \geq 1 > 0.$$

また $g(0) = 0$ なので

$$g(x) \geq 0.$$

従って

$$e^x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$$

である.

(2)

$$f_n(x) = n^2(x-1)e^{-nx}$$

を微分すると

$$f'_n(x) = n^2 e^{-nx} (n+1 - nx).$$

従って $x \geq 0$ において f_n は

$$x = 1 + \frac{1}{n}$$

で最大となる. その最大値は

$$M_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-(n+1)} = ne^{-(n+1)}.$$

よって, $r = e^{-1}$ とおけば

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = e^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} nr^n.$$

有限等比数列を微分して極限をとることにより

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2} \quad (0 < r < 1)$$

だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{e^{-2}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{1}{(e-1)^2}.$$

▶ 解法 2 (積分評価と変数の拡大)

【方針】

(1) は e^x の積分表示から、問題の式より強い評価を得る。(2) は $u = n(x-1)$ と拡大し、最大化を ue^{-u} の標準形へ帰着する。

【解答】

(1) $x \geq 0$ で

$$e^x = 1 + \int_0^x e^t dt \geq 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

ここで $e^t \geq 1+t$ を用いた。従って特に

$$e^x \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

(2) $u = n(x-1)$ とおく。 $x \geq 0$ は $u \geq -n$ に対応し、

$$f_n(x) = ne^{-n} ue^{-u}.$$

$u < 0$ ではこの値は負である。一方

$$\frac{d}{du}(ue^{-u}) = (1-u)e^{-u}$$

だから、 $u \geq 0$ での最大値は $u = 1$ のときの e^{-1} である。従って

$$M_n = ne^{-(n+1)}.$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1/e}{(1-1/e)^2} = \frac{1}{(e-1)^2}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。最大点が定義域 ($x \geq 0$) に含まれることと、両端でそれより大きくなることを増減で確認している。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

xy 平面上の点で x 座標、 y 座標がともに整数である点を格子点という。 a, k は整数で $a \geq 2$ とし、直線 $L: ax + (a^2 + 1)y = k$ を考える。

- (1) 直線 L 上の格子点を 1 つ求めよ。
- (2) $k = a(a^2 + 1)$ のとき、 $x > 0, y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点は存在しないことを示せ。
- (3) $k > a(a^2 + 1)$ ならば、 $x > 0, y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点が存在することを示せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

係数 a と $a^2 + 1$ が互いに素であることから一つの整数解を作り、全整数解を一つの整数パラメータで表す。正の解の存在は、そのパラメータが入る開区間の長さで判定する。

【解答】

(1)

$$a(-ak) + (a^2 + 1)k = k$$

だから

$$(x, y) = (-ak, k)$$

は直線 L 上の格子点である。

また $\gcd(a, a^2 + 1) = 1$ なので、直線 L 上の格子点はすべて

$$x = -ak + (a^2 + 1)t, \quad y = k - at \quad (t \text{ は整数})$$

と表される。

(2) $k = a(a^2 + 1)$ のとき

$$x = (a^2 + 1)(t - a^2), \quad y = a(a^2 + 1 - t).$$

従って $x > 0$ なら $t > a^2$ 、 $y > 0$ なら $t < a^2 + 1$ でなければならない。この二つを同時に満たす整数 t は存在しない。よって正の領域に格子点は存在しない。

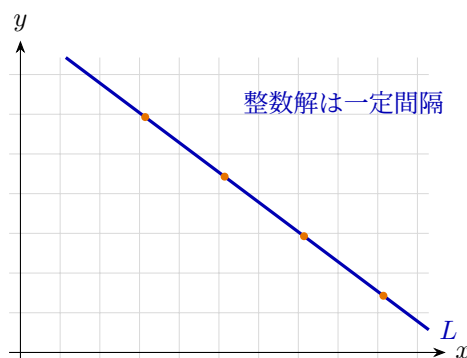
(3) 一般形において $x > 0$ 、 $y > 0$ となる条件は

$$\frac{ak}{a^2 + 1} < t < \frac{k}{a}$$

である。この開区間の長さは

$$\frac{k}{a} - \frac{ak}{a^2 + 1} = \frac{k}{a(a^2 + 1)}.$$

仮定 $k > a(a^2 + 1)$ より、この長さは 1 より大きい。長さが 1 より大きい開区間には必ず整数が一つ以上含まれるから、その整数を t に選べば $x > 0$ 、 $y > 0$ を満たす格子点が得られる。



▶ 解法 2 (床関数による格子点の構成)

【方針】

(1) で 1 個の整数解を作り、互いに素な係数から全整数解を媒介表示する。(3) では正值条件が与える開区間に、床関数で具体的な整数を 1 つ構成する。

【解答】

(1)

$$a(-ak) + (a^2 + 1)k = k$$

だから

$$(x, y) = (-ak, k)$$

は格子点である。また $\gcd(a, a^2 + 1) = 1$ より、すべての整数解は

$$x = -ak + (a^2 + 1)t, \quad y = k - at \quad (t \in \mathbb{Z})$$

と表される。

(2) $x > 0$ 、 $y > 0$ のためには

$$\frac{ak}{a^2 + 1} < t < \frac{k}{a}.$$

$k = a(a^2 + 1)$ なら、この区間は

$$a^2 < t < a^2 + 1$$

となり、整数 t を含まない。

(3) $k > a(a^2 + 1)$ なら

$$\frac{k}{a} - \frac{ak}{a^2 + 1} = \frac{k}{a(a^2 + 1)} > 1.$$

ここで

$$t = \left\lfloor \frac{ak}{a^2 + 1} \right\rfloor + 1$$

と選ぶと、左側の不等式は明らかに成り立つ。さらに区間の長さが 1 より大きいので

$$t \leq \frac{ak}{a^2+1} + 1 < \frac{k}{a}.$$

従ってこの t に対応する x, y はともに正であり、求める格子点が存在する。

【総評】 難度 7、計算量 5。第 (2) 問の境界では許されるパラメータ区間の長さがちょうど 1、第 (3) 問では 1 を超えるという差が本質である。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

直方体 $ABCD - A'B'C'D'$ において、四角形 $ABCD$ と四角形 $A'B'C'D'$ は向かい合った 1 組の面であり、 AA' , BB' , CC' , DD' はこの直方体の辺である。ここで $AA' = 1$, $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$ とする。この直方体の内部を通る線分 AC' 上に点 P をとり、 P を通り AC' に垂直な平面による直方体の切り口を考える。

- (1) P が線分 AC' の中点であるとき、切り口は点 B' , D を通ることを示せ。
- (2) $AP = x$ であるとき、切り口の面積 $S(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

直方体に座標を入れ、切断面を $X + \sqrt{2}Y + Z = 2x$ と表す。 X, Z 平面への射影領域は単位正方形を二本の平行線で切った部分となるので、その面積を $2x$ の位置で場合分けする。

【解答】

座標を

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (1, 0, 0), \quad D = (0, \sqrt{2}, 0), \quad A' = (0, 0, 1)$$

と定める。すると

$$C' = (1, \sqrt{2}, 1), \quad |AC'| = 2.$$

$AP = x$ だから

$$P = \left(\frac{x}{2}, \frac{\sqrt{2}x}{2}, \frac{x}{2} \right).$$

AC' の方向ベクトルは $(1, \sqrt{2}, 1)$ なので、 P を通り AC' に垂直な平面は

$$X + \sqrt{2}Y + Z = 2x$$

である。

- (1) P が中点なら $x = 1$ である。

$$B' = (1, 0, 1), \quad D = (0, \sqrt{2}, 0)$$

はいずれも $X + \sqrt{2}Y + Z = 2$ を満たす。従って切り口は B' と D を通る。

- (2) $u = X$, $w = Y/\sqrt{2}$, $z = Z$ とおくと、直方体内では

$$0 \leq u, w, z \leq 1$$

であり、切断面は

$$u + 2w + z = 2x$$

となる。 $w = (2x - u - z)/2$ だから、 uz 平面への射影領域 D_x は

$$0 \leq u, z \leq 1, \quad 2x - 2 \leq u + z \leq 2x$$

である。

切断面を

$$(u, z) \mapsto \left(u, \frac{2x - u - z}{\sqrt{2}}, z \right)$$

と表示すると、面積要素は $\sqrt{2} du dz$ である。従って $S(x)$ は射影領域の面積の $\sqrt{2}$ 倍である。

単位正方形内で $u + z \leq t$ となる部分の面積は

$$A(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0), \\ t^2/2 & (0 \leq t \leq 1), \\ 1 - (2-t)^2/2 & (1 \leq t \leq 2), \\ 1 & (t \geq 2). \end{cases}$$

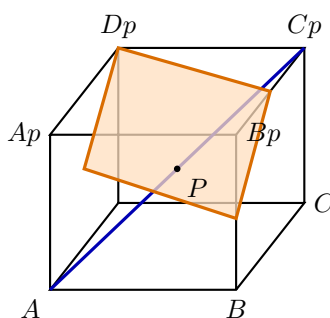
従って

$$S(x) = \sqrt{2}\{A(2x) - A(2x-2)\}.$$

整理すると

$$S(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}\{1 - 2(1-x)^2\} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \sqrt{2}\{1 - 2(x-1)^2\} & 1 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 2\sqrt{2}(2-x)^2 & \frac{3}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

問題では P は線分の内部にあるので $0 < x < 2$ であるが、上式は端点にも連続に延長してある。



▶ 解法 2 (相似三角形と中心対称性)

【方針】

切断方向を固定したまま対角線上を動かすので、 $x = 1$ に関する対称性を使う。 $0 \leq x \leq 1$ では、射影された切り口が相似な三角形または単位正方形から角の三角形を除いた形になることを幾何的に数える。

【解答】

(1) 標準解答と同じ座標で、中点 P に対応する切断面は

$$u + 2w + z = 2$$

である。 B' は $(u, w, z) = (1, 0, 1)$ 、 D は $(u, w, z) = (0, 1, 0)$ であり、どちらも左辺が 2 になる。従って切り口は B', D を通る。

(2) 一般の x では

$$u + 2w + z = 2x, \quad 0 \leq u, w, z \leq 1$$

とする。 uz 平面への射影は

$$0 \leq u, z \leq 1, \quad 2x - 2 \leq u + z \leq 2x$$

であり、切断面積は射影面積の $\sqrt{2}$ 倍である。

$0 \leq x \leq 1/2$ では下側の条件は自動的に満たされ、射影は脚の長さが $2x$ の直角二等辺三角形である。従って

$$S(x) = \sqrt{2} \cdot \frac{(2x)^2}{2} = 2\sqrt{2}x^2.$$

$1/2 \leq x \leq 1$ では、単位正方形から $u + z > 2x$ の角の三角形を除く。除く三角形の脚は $2 - 2x = 2(1 - x)$ だから

$$S(x) = \sqrt{2} \left\{ 1 - \frac{[2(1-x)]^2}{2} \right\} = \sqrt{2}\{1 - 2(1-x)^2\}.$$

直方体を中心について点対称に移すと $AP = x$ の切断面は $AP = 2 - x$ の切断面へ移るので

$$S(x) = S(2 - x).$$

従って残りの範囲を含め

$$S(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}\{1 - 2(1-x)^2\} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \sqrt{2}\{1 - 2(x-1)^2\} & 1 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 2\sqrt{2}(2-x)^2 & \frac{3}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$x = 1$ では切断面が B', D を通ることも座標式から直ちに確認できる。

【総評】 難度 9、計算量 8。切断面の形を直接追う代わりに固定方向へ射影すると、面積は単位正方形内の帯の面積に還元される。4 区間の接続値も一致する。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

0 と異なる複素数 α に対して数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \alpha^n + \alpha^{-n}$ で定める。すべての自然数 n について $|a_n| < 2$ が成立しているとする。このとき

- (1) $|\alpha| = 1$ が成立することを示せ。
- (2) $|a_m| > 1$ となる自然数 m が存在することを示せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) $|\alpha| \neq 1$ なら α^n と α^{-n} の一方が指数的に大きくなることを逆三角不等式で示す。(2) 単位円上の表示に直し、 $m = 1, 2, 3$ の場合分けを行う。

【解答】

(1) $r = |\alpha| > 0$ とおく。もし $r > 1$ なら、逆三角不等式より

$$|a_n| = |\alpha^n + \alpha^{-n}| \geq r^n - r^{-n}.$$

右辺は n を大きくすると 2 を超えるので、すべての自然数 n で $|a_n| < 2$ という仮定に反する。

もし $0 < r < 1$ なら同様に

$$|a_n| \geq r^{-n} - r^n$$

が大きな n で 2 を超え、やはり矛盾する。従って

$$|\alpha| = 1$$

である。

(2) $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと

$$a_m = 2 \cos m\theta.$$

従って $|\cos m\theta| > 1/2$ となる自然数 m を見つければよい。

$|\cos \theta| > 1/2$ なら $m = 1$ でよい。そうでなければ、余弦の絶対値の周期性から

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

としてよい。この範囲では $|\cos 2\theta| \geq 1/2$ であり、端点以外では不等号は厳密だから $m = 2$ でよい。端点 $\theta = \pi/3, 2\pi/3$ では

$$|\cos 3\theta| = 1$$

なので $m = 3$ でよい。

以上より常に

$$|a_m| = 2|\cos m\theta| > 1$$

となる自然数 m が存在する。

▶ 解法 2 (チェビシェフ型の代数計算)

【方針】

(1) は逆三角不等式で単位円上にあることを示す。(2) は $c = \cos \theta$ とおき、2 倍角・3 倍角を使って $m = 1, 2, 3$ のいずれかで厳密不等号が成立することを代数的に証明する。

【解答】

(1) $r = |\alpha|$ とする。 $r > 1$ なら

$$|a_n| \geq r^n - r^{-n} \rightarrow \infty,$$

$0 < r < 1$ なら

$$|a_n| \geq r^{-n} - r^n \rightarrow \infty.$$

いずれもすべての n で $|a_n| < 2$ という仮定に反する。従って

$$|\alpha| = 1.$$

(2) $\alpha = e^{i\theta}$ 、 $c = \cos \theta$ とおくと

$$a_m = 2 \cos m\theta.$$

$|c| > 1/2$ なら $m = 1$ でよい。そうでないとする。 $|2c^2 - 1| > 1/2$ なら、 $\cos 2\theta = 2c^2 - 1$ より $m = 2$ でよい。これも成り立たないなら

$$|c| \leq \frac{1}{2}, \quad |2c^2 - 1| \leq \frac{1}{2}$$

から $c^2 = 1/4$ となる。3 倍角の公式より

$$\cos 3\theta = 4c^3 - 3c = -2c,$$

従って

$$|a_3| = 2|\cos 3\theta| = 2 > 1.$$

以上より条件を満たす自然数 m が必ず存在する。

【総評】 難度 6、計算量 4。第 (1) 問では大きな (n) の存在を逆三角不等式で保証し、第 (2) 問では厳密不等号のため端点を別扱いする。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 6 問】

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

で定める。

(1) $y = f(x)$ の $x = 1$ における法線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた法線と x 軸および $y = f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

$f'(x) = 1/(1+x^2)$ と $f(1) = \pi/4$ から法線を求める。囲まれる領域を、 $0 \leq x \leq 1$ の曲線下と、法線が作る三角形に分けて積分する。

【解答】

(1) 微分積分学の基本定理より

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

また

$$f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

従って $x = 1$ における接線の傾きは $1/2$ 、法線の傾きは -2 である。求める法線は

$$y - \frac{\pi}{4} = -2(x - 1),$$

すなわち

$$y = -2x + 2 + \frac{\pi}{4}$$

である。

(2) 法線の x 軸との交点は

$$x = 1 + \frac{\pi}{8}$$

である。法線と曲線の差を $h(x)$ とすると

$$h'(x) = -2 - \frac{1}{1+x^2} < 0, \quad h(1) = 0$$

だから、 $x < 1$ では法線が曲線より上にあり、両者は $x = 1$ 以外では交わらない。従って求める面積は

$$\int_0^1 f(x) dx$$

と、底辺 $\pi/8$ 、高さ $\pi/4$ の三角形の面積との和である。

部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

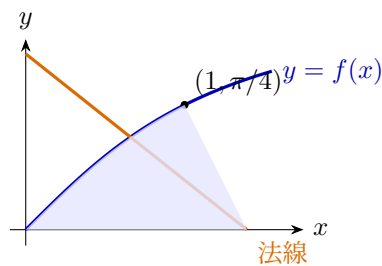
また三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{64}.$$

よって求める面積は

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi^2}{64}$$

である。



▶ 解法 2 (積分順序の交換)

【方針】

法線は微分で求める。面積の曲線部分は部分積分を使わず、 $f(x)$ を二重積分と見て積分順序を交換する。残りは法線が作る三角形である。

【解答】

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f(1) = \frac{\pi}{4}$$

なので、法線の傾きは -2 である。従って

$$y = -2x + 2 + \frac{\pi}{4}.$$

(2) 法線と x 軸の交点は $x = 1 + \pi/8$ である。法線と曲線の差の導関数は

$$-2 - \frac{1}{1+x^2} < 0$$

だから、両者の交点は $x = 1$ の一点だけである。

曲線下の面積は、積分順序を交換して

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

$x = 1$ から法線の x 切片までの部分は、底辺 $\pi/8$ 、高さ $\pi/4$ の三角形なので、その面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{64}.$$

従って求める面積は

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi^2}{64}.$$

【総評】 難度 6、計算量 6。法線と曲線の交点が接点だけであることを単調性で確認してから、領域を曲線下と三角形に分ける。答案では結論だけでなく、等号・端点・定義域を明示し、各変形の根拠が追える構成にした。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。