

京都大学 2000 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

円に内接する四角形 $ABPC$ は次の条件 (イ), (ロ) を満たすとする。

(イ) 三角形 ABC は正三角形である。

(ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p : 1 - p$ ($0 < p < 1$) の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

交点をまず固定する。 AP と BC の交点を D とすると、内分比から $\overrightarrow{AD} = (1 - p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$ である。したがって P は直線 AD 上にあり、 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AD}$ とおける。残る仕事は倍率 λ の決定である。 A, B, C を通る円の条件を、 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を基底にした係数で表し、 $P \neq A$ に対応する解を選ぶ。最後に $0 < p < 1$ から分母が正であることも確認する。

【解答】

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく。三角形 ABC は正三角形なので

$$|\vec{b}| = |\vec{c}|, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{b}|^2$$

である。 AP と BC の交点を D とする。 D は BC を $p : 1 - p$ に内分するから $\overrightarrow{AD} = (1 - p)\vec{b} + p\vec{c}$ である。点 A, D, P は一直線上にあり、 $D \neq A$ であるから、ある実数 λ を用いて $\overrightarrow{AP} = \lambda\{(1 - p)\vec{b} + p\vec{c}\}$ と書ける。

ここで、点 X が A, B, C を通る円の上にある条件を求める。 $\overrightarrow{AX} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ とする。この円は A を通るので、中心を O とすれば $|\overrightarrow{AX}|^2 = 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AX}$ と書ける。また B, C も円上にあるから

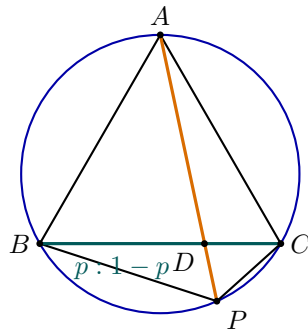
$$2\overrightarrow{AO} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2, \quad 2\overrightarrow{AO} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2$$

である。したがって $|\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}|^2 = (\alpha + \beta)|\vec{b}|^2$ となる。左辺を内積で計算すると $|\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ だから、円周条件は $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha + \beta$ である。 P については $\alpha = \lambda(1 - p)$, $\beta = \lambda p$ である。これを代入すると $\lambda^2\{(1 - p)^2 + p(1 - p) + p^2\} = \lambda$ である。 $P \neq A$ なので $\lambda \neq 0$ であり、 $\lambda = \frac{1}{(1 - p)^2 + p(1 - p) + p^2} = \frac{1}{p^2 - p + 1}$ を得る。 $0 < p < 1$ なので $p^2 - p + 1 = (p - 1/2)^2 + 3/4 > 0$ であり、分母は 0 にならない。

よって

$$\overrightarrow{AP} = \frac{(1 - p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}}{p^2 - p + 1}$$

である。



▶ 解法 2 (座標と円の方程式)

【方針】

座標を置き、円の方程式と直線 AD の媒介表示を直接連立する。内分点 D の座標を先に求めれば、未知量は直線上の倍率 s だけになる。 $s = 0$ は点 A を表すため除き、もう一つの交点 P に対応する値を選ぶ。

【解答】

$A = (0, 0)$ 、 $B = (1, 0)$ 、 $C = (1/2, \sqrt{3}/2)$ とおく。このとき $\triangle ABC$ は正三角形であり、3 点 A, B, C を通る円は

$$x^2 + y^2 = x + \frac{y}{\sqrt{3}}$$

である。

BC を $p : 1 - p$ に内分する点を D とすると

$$D = (1 - p)B + pC = \left(1 - \frac{p}{2}, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

点 P は直線 AD 上にあるから、ある実数 s を用いて

$$P = sD = \left(s\left(1 - \frac{p}{2}\right), s\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$$

と書ける。これを円の方程式へ代入すると

$$s^2 \left\{ \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3p^2}{4} \right\} = s \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right).$$

中括弧の中は $p^2 - p + 1$ であるから

$$s\{s(p^2 - p + 1) - 1\} = 0.$$

$s = 0$ は点 A を表す。求めるもう一つの交点 P では

$$s = \frac{1}{p^2 - p + 1}.$$

したがって

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AD} = \frac{(1 - p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}}{p^2 - p + 1}.$$

$p^2 - p + 1 = (p - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ なので、分母が 0 になることはない。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 5。目安は 15 分から 20 分。内分点で AP の方向を先に決め、円周条件で倍率だけを求めるのが最短である。係数 α, β による円の条件 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha + \beta$ を導く部分が得点差になりやすい。比 $p : 1 - p$ の読み違い、 $P = A$ に対応する $\lambda = 0$ を採用してしまうミス、分母 $p^2 - p + 1$ の正値確認漏れに注意したい。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

実数 a は $0 < a \leq 2$ の範囲を動くものとする。

- (1) $y = \sqrt{x}$ と $y = \frac{2}{a}x + 1 - \frac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ。
 (2) 2 次方程式 $(2x + a - 1)^2 = a^2x$ の複素数の範囲で考えた 2 つの解を α, β (ただし $|\alpha| \leq |\beta|$) とする。このとき、 $|\beta|$ の最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

(1) は $t = \sqrt{x}$ と置き、 $t \geq 0$ の 2 次方程式が解をもつ条件へ直す。判別式だけでなく、得られる実数解が非負であることも確認する。(2) は方程式を $4x^2 - (a-2)^2x + (a-1)^2 = 0$ に整理し、判別式の符号で実数解の場合と共役な虚数解の場合に分ける。実数解の場合は大きい方の絶対値が少なくとも解の平均以上、虚数解の場合は絶対値が積の平方根に等しいことを使い、共通の境界 $a = 4 - 2\sqrt{2}$ で最小になることを示す。

【解答】

(1) $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$) とおく。すると共有点をもつ条件は $t = \frac{2}{a}t^2 + 1 - \frac{1}{a}$ を満たす $t \geq 0$ が存在することである。両辺に a をかけて整理すると $2t^2 - at + a - 1 = 0$ である。

この 2 次方程式の判別式は $D_1 = a^2 - 8(a-1) = a^2 - 8a + 8$ である。 $0 < a \leq 2$ の範囲で $a^2 - 8a + 8 \geq 0$ となるのは $0 < a \leq 4 - 2\sqrt{2}$ である。

この範囲では、方程式の解が $t \geq 0$ に存在することも確認しておく。解の和は $a/2 > 0$ である。 $0 < a < 1$ なら解の積 $(a-1)/2 < 0$ なので正の解を 1 つもつ。 $1 \leq a \leq 4 - 2\sqrt{2}$ なら解の積は非負で、解の和は正であるから、実数解はともに非負である。したがって求める範囲は $0 < a \leq 4 - 2\sqrt{2}$ である。

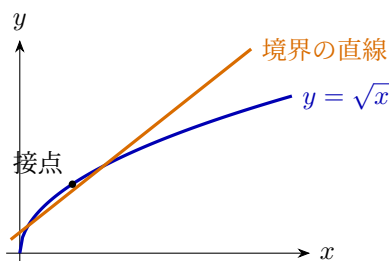
(2) 与えられた方程式を展開する。 $(2x + a - 1)^2 = a^2x$ より $4x^2 + 4(a-1)x + (a-1)^2 - a^2x = 0$ である。 $4(a-1) - a^2 = -(a-2)^2$ だから $4x^2 - (a-2)^2x + (a-1)^2 = 0$ となる。この方程式の判別式は $D_2 = (a-2)^4 - 16(a-1)^2 = a^2(a^2 - 8a + 8)$ である。 $a_0 = 4 - 2\sqrt{2}$ とおく。 $0 < a \leq a_0$ では $D_2 \geq 0$ であり、2 解は実数である。このとき 2 解の和は $\alpha + \beta = \frac{(a-2)^2}{4}$ で、積は $\alpha\beta = \frac{(a-1)^2}{4} \geq 0$ であるから、2 解はともに非負である。 $|\alpha| \leq |\beta|$ なので $|\beta|$ は大きい方の解であり、少なくとも 2 解の平均以上である。よって $|\beta| \geq \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{(a-2)^2}{8}$ である。 $0 < a \leq a_0 < 2$ だから $(2-a)^2 \geq (2-a_0)^2$ であり、したがって

$$|\beta| \geq \frac{(2-a_0)^2}{8} = \frac{(2\sqrt{2}-2)^2}{8} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

である。

一方、 $a_0 < a \leq 2$ では $D_2 < 0$ であり、2 解は共役な虚数である。したがって 2 解の絶対値は等しく、積の絶対値から $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{\left|\frac{(a-1)^2}{4}\right|} = \frac{|a-1|}{2}$ である。ここで $a_0 = 4 - 2\sqrt{2} > 1$ なので、この範囲では $|\beta| = \frac{a-1}{2} > \frac{a_0-1}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ である。

最後に $a = a_0$ のときは判別式が 0 で、2 解は重解である。このとき $|\beta| = \frac{(a_0-2)^2}{8} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ となる。よって $|\beta|$ の最小値は $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ である。



▶ 解法 2 (解の公式と接する境界)

【方針】

(1) では $t = \sqrt{x}$ により接する境界を直接求める。(2) では二次方程式の解を平方根を含む形で書き、実根域と共役複素根域を境界 $a = 4 - 2\sqrt{2}$ でつなぐ。各域で絶対値が単調であることを確認する。

【解答】

(1) $t = \sqrt{x} \geq 0$ とおくと、共有点条件は

$$2t^2 - at + a - 1 = 0$$

である。 t の二次方程式が実数解をもつ条件は

$$a^2 - 8a + 8 \geq 0.$$

$0 < a \leq 2$ より

$$0 < a \leq a_0, \quad a_0 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

この範囲では解の和が正であり、積の符号も確認すれば少なくとも 1 つ非負の解をもつ。従ってこれが必要十分条件である。

(2) 方程式は

$$4x^2 - (a-2)^2x + (a-1)^2 = 0$$

となり、その解は

$$x = \frac{(a-2)^2 \pm a\sqrt{a^2 - 8a + 8}}{8}.$$

$0 < a \leq a_0$ では 2 解は非負の実数で、大きい解は

$$R(a) = \frac{(a-2)^2 + a\sqrt{a^2 - 8a + 8}}{8} \geq \frac{(a-2)^2}{8}.$$

$a \leq a_0 < 2$ より右辺は $a = a_0$ で最小となる。

$a_0 < a \leq 2$ では 2 解は共役で、積から両者の絶対値は

$$\frac{a-1}{2}$$

である。これは a とともに増加する。従って両領域を通じた最小値は判別式が 0 となる $a = a_0$ で実現し、

$$\min |\beta| = \frac{a_0 - 1}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}.$$

重解なので α, β のどちらを大きい絶対値として選んでも同じである。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安は 25 分。第 1 問の判別式境界 $4 - 2\sqrt{2}$ が第 2 問の判別式境界にも現れることを見抜くと整理しやすい。第 2 問で無理に大きい根の式を微分しなくても、実数解なら大きい根は平均以上、虚数解なら絶対値は積の平方根、という基本事実で下から評価できる。注意点は、(1) で $t \geq 0$ の確認を省かないこと、(2) で $a = 4 - 2\sqrt{2}$ の等号が最小値を実現することを明記することである。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

$\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}, 0\right)$ とする.

- (1) 長さ 1 の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し, $\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c}$ とおく. このとき次の不等式 (*) が成り立つことを示せ.

$$(*) \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}$$

- (2) 不等式 (*) を満たす (α, β) ($0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$) の範囲を図示せよ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

文系第 3 問と同じ構造で, $\vec{c} = (x, y, z)$ とおき, $\cos \alpha = x$, $\cos \beta = (x + \sqrt{3}y)/2$ を代入する. 左辺が $3(x^2 + y^2)/4$ にまとまるので, $|\vec{c}| = 1$ から (1) が出る. (2) は $X = \cos \alpha$, $Y = \cos \beta$ の領域を, ラジアン表記の $\alpha\beta$ 平面へ戻す. $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ で $\cos$ が単調減少するため, 境界は 4 本の直線になる.

【解答】

(1) $\vec{c} = (x, y, z)$ とおく. $|\vec{c}| = 1$ であるから $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ である. $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ なので

$\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c} = x$ であり, $\cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$ である. これを左辺に代入すると

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \\ &= x^2 - x \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)^2 \\ &= \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{3}{4}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

である. $x^2 + y^2 \leq 1$ だから $\cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}$ が成り立つ.

(2) $X = \cos \alpha$, $Y = \cos \beta$ とおくと, 不等式は $X^2 - XY + Y^2 \leq \frac{3}{4}$ である. $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ なので $-1 \leq X, Y \leq 1$ である.

固定した α に対し, Y について解くと $Y^2 - (\cos \alpha)Y + \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \leq 0$ である. 判別式は $3 \sin^2 \alpha$ であり, $0 \leq \alpha \leq \pi$ では $\sin \alpha \geq 0$ である. よって

$$\frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{2} \leq \cos \beta \leq \frac{\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}{2}$$

である. 三角関数の加法定理より, これは

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \leq \cos \beta \leq \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right)$$

である. $0 \leq \beta \leq \pi$ で $\cos \beta$ は単調減少する. したがって図示すべき範囲は

$$\left| \alpha - \frac{\pi}{3} \right| \leq \beta \leq \begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} & \left(0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} \right), \\ \frac{5\pi}{3} - \alpha & \left(\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi \right) \end{cases}$$

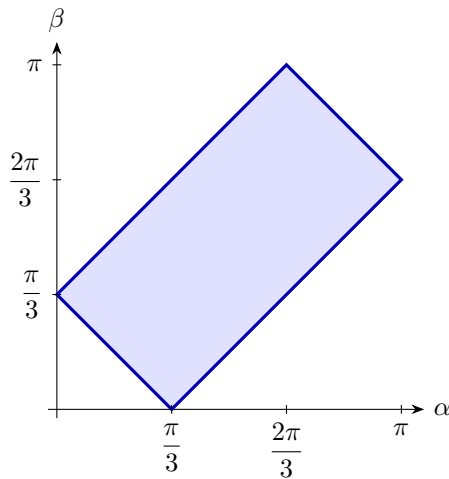
である. したがって $\alpha\beta$ 平面では, 4 直線

$$\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha, \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{5\pi}{3} - \alpha$$

で囲まれる部分を描けばよい. 頂点は

$$\left(0, \frac{\pi}{3} \right), \quad \left(\frac{\pi}{3}, 0 \right), \quad \left(\pi, \frac{2\pi}{3} \right), \quad \left(\frac{2\pi}{3}, \pi \right)$$

である.



▶ 解法 2 (グラム行列式)

【方針】

3 本の単位ベクトルのグラム行列式を用いて不等式を一行で得る。その後、余弦の加法定理と $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ での単調性から、楕円形の余弦領域を $\alpha\beta$ 平面上の四角形へ移す。

【解答】

(1)

$$X = \cos \alpha, \quad Y = \cos \beta$$

とする。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1/2$ なので、グラム行列の非負性より

$$0 \leq \det \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & X \\ 1/2 & 1 & Y \\ X & Y & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} - X^2 + XY - Y^2.$$

従って

$$\cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}.$$

(2) Y について解けば

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \leq \cos \beta \leq \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right).$$

$[0, \pi]$ で余弦は狭義単調減少するので

$$\left| \alpha - \frac{\pi}{3} \right| \leq \beta \leq \begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} & \left(0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} \right), \\ \frac{5\pi}{3} - \alpha & \left(\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi \right). \end{cases}$$

よって領域は

$$\left(0, \frac{\pi}{3} \right), \left(\frac{\pi}{3}, 0 \right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3} \right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi \right)$$

を頂点とする閉じた四角形である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安は 20 分。座標計算で不等式を示すだけなら標準的だが、図示では $X^2 - XY + Y^2 \leq 3/4$ のままにせず、 α, β の範囲へ戻す必要がある。境界を $\beta = |\alpha - \pi/3|$ と上側の折れ線で表せると、図の形が明確になる。文系版と同内容だが、こちらはラジアン表記なので、 60° を $\pi/3$ 、 120° を $2\pi/3$ に読み替える際のミスに注意する。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

p を素数, a, b を互いに素な正の整数とすると、 $(a + bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし i は虚数単位を表す。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

実数であることは虚部が 0 であることなので、二項展開の虚部だけを見る。 $p = 2$ は直接計算で処理する。 p が奇素数のとき、虚部を 0 と仮定し、まず合同式で見ると最後の項 b^p から $p \mid b$ が従う。そこで $b = p^m b_0$ と書き、 p で割れる回数を比較する。第 1 項 $pa^{p-1}b$ はちょうど p^{m+1} までしか割れない一方、他の項はすべて p^{m+2} で割れるため、虚部の和が 0 になることはない。

【解答】

まず $p = 2$ の場合を調べる。このとき $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ である。 a, b は正の整数なので $2ab \neq 0$ であり、虚部は 0 でない。したがって $(a + bi)^2$ は実数ではない。

以下、 p を奇素数とする。背理法で、 $(a + bi)^p$ が実数であると仮定する。

二項定理より、 $(a + bi)^p$ の虚部は

$${}_p C_1 a^{p-1} b - {}_p C_3 a^{p-3} b^3 + {}_p C_5 a^{p-5} b^5 - \cdots + (-1)^{(p-1)/2} b^p$$

である。仮定よりこの値は 0 である。

ここで、 $1 \leq k \leq p-1$ に対して ${}_p C_k$ は p で割り切れる。実際 ${}_p C_k = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k(k-1) \cdots 1}$ であり、 p は素数、 $1 \leq k \leq p-1$ なので分母は p で割り切れない。したがって分子に含まれる 1 つの p が残る。

虚部が 0 である等式を p で割った余りで見ると、最後の項以外の二項係数はすべて p で割り切れるから $(-1)^{(p-1)/2} b^p \equiv 0 \pmod{p}$ である。よって $p \mid b$ である。

そこで、 b を割る p の個数を m とし、 $b = p^m b_0$ と書く。ただし $m \geq 1$ で、 b_0 は p で割り切れない。 a と b は互いに素だから、 a も p で割り切れない。

虚部の第 1 項は ${}_p C_1 a^{p-1} b = pa^{p-1}b = p^{m+1}a^{p-1}b_0$ である。 a も b_0 も p で割り切れないので、この項は p^{m+1} では割り切れるが、 p^{m+2} では割り切れない。

次に、第 3 項以降で、最後の b^p を除く項を考える。それらは ${}_p C_k a^{p-k} b^k$ ($k = 3, 5, \dots, p-2$) の形である。 ${}_p C_k$ は p で割り切れ、 b^k は p^{mk} で割り切れる。 $k \geq 3, m \geq 1$ だから $1 + mk \geq m + 2$ である。したがってこれらの項はすべて p^{m+2} で割り切れる。

最後の項 b^p は p^{mp} で割り切れる。 $p \geq 3, m \geq 1$ より $mp \geq m + 2$ であるから、これも p^{m+2} で割り切れる。

以上より、虚部の和は「 p^{m+2} では割り切れない第 1 項」と「すべて p^{m+2} で割り切れる残りの項」の和である。したがって虚部全体は p^{m+2} で割り切れず、特に 0 にはなり得ない。これは $(a + bi)^p$ が実数であるという仮定に反する。

よって、任意の素数 p と互いに素な正の整数 a, b について、 $(a + bi)^p$ は実数ではない。

▶ 解法 2 (無限降下法)

【方針】

虚部が 0 と仮定し、まず法 p で $p \mid b$ を導く。その後、 $b = pb_1$ と代入して同じ議論を繰り返すと b が任意の高い p のべきで割れることになり、正整数であることに矛盾する。

【解答】

$p = 2$ では

$$\operatorname{Im}(a + bi)^2 = 2ab \neq 0$$

なので明らかである。以下 p を奇素数とし、虚部が 0 であると仮定する。

二項展開の虚部は

$$pa^{p-1}b - {}_pC_3a^{p-3}b^3 + \cdots + (-1)^{(p-1)/2}b^p = 0.$$

$1 \leq k \leq p-1$ では ${}_pC_k$ は p の倍数である。上式を法 p で見ると

$$b^p \equiv 0 \pmod{p},$$

従って $p \mid b$ である。

$b = pb_1$ と書き、上式を p^2 で割る。第 1 項は $a^{p-1}b_1$ となる。第 3 項以降は二項係数から少なくとも 1 個、 b^k から少なくとも 3 個の p を含むため、 p^2 で割った後も p の倍数である。最後の b^p も $p \geq 3$ より同様である。従って法 p で

$$a^{p-1}b_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

$\gcd(a, b) = 1$ かつ $p \mid b$ だから $p \nmid a$ であり、 $p \mid b_1$ が従う。

同じ操作を繰り返すと、任意の自然数 r について $p^r \mid b$ となる。しかし b は正の整数なので不可能である。従って虚部は 0 ではなく、

$$(a + bi)^p \notin \mathbb{R}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 6。目安は 30 分。二項展開全体を眺めるのではなく、虚部だけを取り出し、素数 p による割り切れ方を比較する問題である。最初の合同式で $p \mid b$ を出す段階と、その後に $b = p^m b_0$ として第 1 項だけ割り切れ方が 1 段階浅いことを示す段階を分けて書くと論理が崩れにくい。 $p = 2$ を処理し忘れること、 ${}_pC_k$ が p で割り切れる理由を省くこと、最後の b^p の割り切れ方を確認しないことが主な減点要因である。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める。

$$c_n = (n+1) \int_0^1 x^n \cos \pi x dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

このとき

- (1) c_n と c_{n+2} の関係を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた極限値を c とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c}{c_n - c}$ を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

$$I_n = \int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx$$

とおき、部分積分を 2 回行って I_{n+2} を I_n で表す。 $c_n = (n+1)I_n$ に戻せば (1) が得られる。(2) は、重み $(n+1)x^n$ が $x = 1$ 付近に集中することを示し、連続関数 $\cos \pi x$ の端点値 -1 に収束させる。(3) は $d_n = c_n + 1$ として、 $1 + \cos \pi x = 1 - \cos\{\pi(1-x)\}$ が $(1-x)^2$ と同じ大きさで 0 に近づくことを、 $\sin u/u \rightarrow 1$ から評価し、 d_n の主項を求める。

【解答】

(1)

$$I_n = \int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx$$

とおく。まず

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} \cos \pi x \, dx$$

を部分積分する。 $\sin \pi x$ は $x = 0, 1$ で 0 だから

$$I_{n+2} = \left[\frac{x^{n+2} \sin \pi x}{\pi} \right]_0^1 - \frac{n+2}{\pi} \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x \, dx = -\frac{n+2}{\pi} \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x \, dx$$

である。さらに

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x \, dx &= \left[-\frac{x^{n+1} \cos \pi x}{\pi} \right]_0^1 + \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{n+1}{\pi} I_n \end{aligned}$$

である。したがって $I_{n+2} = -\frac{n+2}{\pi^2} - \frac{(n+2)(n+1)}{\pi^2} I_n$ となる。 $c_n = (n+1)I_n$ 、 $c_{n+2} = (n+3)I_{n+2}$ であるから

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= (n+3) \left\{ -\frac{n+2}{\pi^2} - \frac{(n+2)(n+1)}{\pi^2} I_n \right\} \\ &= -\frac{(n+2)(n+3)}{\pi^2} \{1 + (n+1)I_n\} \\ &= -\frac{(n+2)(n+3)}{\pi^2} (1 + c_n) \end{aligned}$$

である。よって $c_{n+2} = -\frac{(n+2)(n+3)}{\pi^2} (1 + c_n)$ が求める関係である。

(2) 次の事実を用いる。 $\varphi(x)$ が $[0, 1]$ で連続なら

$$(n+1) \int_0^1 x^n \varphi(x) \, dx \rightarrow \varphi(1)$$

である。理由を確認する。 $0 < \delta < 1$ とすると、 $0 \leq x \leq 1 - \delta$ では $x^n \leq (1 - \delta)^n$ なので、この部分の寄与は $n(1 - \delta)^n$ の定数倍で 0 に近づく。一方、 $1 - \delta \leq x \leq 1$ では、 δ を十分小さく取れば $\varphi(x)$ は $\varphi(1)$ にいくらでも近くなる。また

$$(n+1) \int_0^1 x^n \, dx = 1$$

であるから、上の収束が従う。

ここで $\varphi(x) = \cos \pi x$ とすれば $\varphi(1) = -1$ である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx = -1$$

である。よって $c = -1$ である。

(3) $d_n = c_n + 1$ とおく。(2) より $d_n \rightarrow 0$ であり、求める極限は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n}$ である。また

$$d_n = (n+1) \int_0^1 x^n (1 + \cos \pi x) dx$$

である。 x が 1 に近いときの $1 + \cos \pi x$ を調べる。 $1 + \cos \pi x = 1 - \cos \{\pi(1-x)\} = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi(1-x)}{2} \right)$ である。 $u \rightarrow 0$ のとき $\sin u/u \rightarrow 1$ だから $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(1-x)^2} = \frac{\pi^2}{2}$ である。

したがって、任意の正数 ε に対し、 x が十分 1 に近ければ

$$\left(\frac{\pi^2}{2} - \varepsilon \right) (1-x)^2 \leq 1 + \cos \pi x \leq \left(\frac{\pi^2}{2} + \varepsilon \right) (1-x)^2$$

が成り立つ。1 から離れた範囲 $0 \leq x \leq 1 - \delta$ の積分は、 $(1-\delta)^n$ の定数倍で抑えられ、下の量

$$(n+1) \int_0^1 x^n (1-x)^2 dx$$

に比べても 0 に近づく。実際、後者は

$$\begin{aligned} (n+1) \int_0^1 x^n (1-x)^2 dx &= (n+1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

であるから、指数的に小さい項は無視できる。

以上より

$$\frac{d_n}{(n+1) \int_0^1 x^n (1-x)^2 dx} \rightarrow \frac{\pi^2}{2}$$

である。すなわち

$$d_n \sim \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \frac{\pi^2}{(n+2)(n+3)}$$

である。したがって $\frac{d_{n+1}}{d_n} \rightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+4)} \rightarrow 1$ である。

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c}{c_n - c} = 1$ である。

▶ 解法 2 (端点の拡大による漸近評価)

【方針】

$x = 1 - y/(n+1)$ と端点近傍を拡大し、重み $(n+1)x^n$ が指数関数 e^{-y} に近づくことを見る。(2) は端点値、(3) は $1 + \cos \pi x$ の 2 次近似から主項を得る。有限区間と尾部を分けて極限交換の根拠も補う。

【解答】

(1)

$$I_n = \int_0^1 x^n \cos \pi x dx$$

とおく。部分積分を 2 回行くと

$$I_{n+2} = -\frac{n+2}{\pi^2} - \frac{(n+2)(n+1)}{\pi^2} I_n.$$

$c_n = (n+1)I_n$ 、 $c_{n+2} = (n+3)I_{n+2}$ を代入して

$$c_{n+2} = -\frac{(n+2)(n+3)}{\pi^2} (1 + c_n).$$

(2)

$$c_n = (n+1) \int_0^1 x^n \cos \pi x dx$$

で $x = 1 - y/(n+1)$ とおくと

$$c_n = \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{y}{n+1}\right)^n \cos\left(\pi - \frac{\pi y}{n+1}\right) dy.$$

固定した y について被積分関数は $-e^{-y}$ に収束する。 $0 \leq y \leq (n+1)/2$ では $(1 - y/(n+1))^n \leq e^{-ny/(n+1)}$ と抑えられ、残りの区間の寄与も指数的に小さい。従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = - \int_0^{\infty} e^{-y} dy = -1.$$

よって $c = -1$ である。

(3)

$$d_n = c_n + 1 = (n+1) \int_0^1 x^n (1 + \cos \pi x) dx.$$

同じ置換により

$$d_n = \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{y}{n+1}\right)^n \left\{1 - \cos \frac{\pi y}{n+1}\right\} dy.$$

固定した y では

$$1 - \cos \frac{\pi y}{n+1} \sim \frac{\pi^2 y^2}{2(n+1)^2}.$$

上と同じ指数評価で尾部を抑えると

$$(n+1)^2 d_n \rightarrow \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \pi^2.$$

従って

$$d_n \sim \frac{\pi^2}{(n+1)^2}, \quad \frac{d_{n+1}}{d_n} \rightarrow 1.$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c}{c_n - c} = 1.$$

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安は 30 分から 35 分。部分積分の符号、特に $\cos \pi = -1$ によって境界項が正になる箇所が第 1 の注意点である。第 2 問は端点集中の標準事実をそのまま使えるが、第 3 問では $1 + \cos \pi x$ が $x = 1$ で 2 次の速さで 0 になるため、単なる連続関数の極限だけでは足りない。 $1 + \cos \pi x = 2 \sin^2(\pi(1-x)/2)$ と

$$(n+1) \int x^n (1-x)^2 dx$$

の正確な値を使うと、比の極限まで無理なく届く。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。

【第 6 問】

n, k は整数で, $n \geq 2, 0 \leq k \leq 4$ とする. サイコロを n 回投げて出た目の和を 5 で割ったときの余りが k に等しくなる確率を $p_n(k)$ とする.

- (1) $p_{n+1}(0), \dots, p_{n+1}(4)$ を $p_n(0), \dots, p_n(4)$ を用いて表せ.
- (2) $p_n(0), \dots, p_n(4)$ の最大値を M_n , 最小値を m_n とするとき次の (イ), (ロ) が成立することを示せ.
 - (イ) $m_n \leq \frac{1}{5} \leq M_n$.
 - (ロ) 任意の k, l ($0 \leq k, l \leq 4$) に対し $p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leq \frac{1}{6}(M_n - m_n)$.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ を求めよ.

▶ 解法 1 (標準解答)

【方針】

出目を 5 で割った余りで分類する. サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 は余り 1, 2, 3, 4, 0, 1 なので, 余り 1 だけが 2 通りある. このため $p_{n+1}(k)$ は全確率の和 1 に $p_n(k-1)$ を余分に足した形で $(1 + p_n(k-1))/6$ と書ける. 最大値と最小値については, 平均が $1/5$ であることと, 差が次の回で 6 分の 1 以下に縮むことを示す. 最後は $M_n - m_n \rightarrow 0$ と全確率の和 1 から各 $p_n(k)$ の極限を決める.

【解答】

(1) 以下, 添字は 5 で割った余りとして読むことにする. サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 を 5 で割った余りは 1, 2, 3, 4, 0, 1 である. したがって, 和の余りが k になるには, 直前の余りがそれぞれ $k-1, k-2, k-3, k-4, k, k-1$ であればよい. よって $p_{n+1}(k) = \frac{2p_n(k-1) + p_n(k-2) + p_n(k-3) + p_n(k-4) + p_n(k)}{6}$ である.

また $p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + p_n(3) + p_n(4) = 1$ であるから, 上式は $p_{n+1}(k) = \frac{1 + p_n(k-1)}{6}$ とも書ける. 具体的には

$$\begin{aligned} p_{n+1}(0) &= \frac{1 + p_n(4)}{6}, \\ p_{n+1}(1) &= \frac{1 + p_n(0)}{6}, \\ p_{n+1}(2) &= \frac{1 + p_n(1)}{6}, \\ p_{n+1}(3) &= \frac{1 + p_n(2)}{6}, \\ p_{n+1}(4) &= \frac{1 + p_n(3)}{6} \end{aligned}$$

である.

(2) (イ) 5 つの確率の和は 1 であるから, その平均は $\frac{p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + p_n(3) + p_n(4)}{5} = \frac{1}{5}$ である. 最大値を M_n , 最小値を m_n とすれば, 平均は最小値以上, 最大値以下である. したがって $m_n \leq \frac{1}{5} \leq M_n$ である.

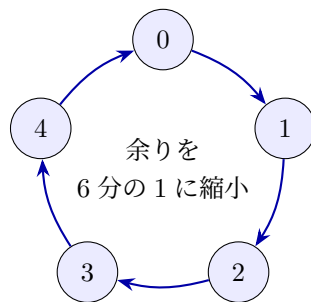
(ロ) (1) の簡略形より, 任意の k, l に対して

$$\begin{aligned} p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) &= \frac{1 + p_n(k-1)}{6} - \frac{1 + p_n(l-1)}{6} \\ &= \frac{p_n(k-1) - p_n(l-1)}{6} \end{aligned}$$

である. $p_n(k-1) \leq M_n, p_n(l-1) \geq m_n$ だから $p_n(k-1) - p_n(l-1) \leq M_n - m_n$ である. よって $p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leq \frac{1}{6}(M_n - m_n)$ が成り立つ.

(3) $p_{n+1}(k)$ の最大値をとる添字を k_0 , 最小値をとる添字を l_0 とする. (2)(ロ) をこの k_0, l_0 に適用すると $M_{n+1} - m_{n+1} = p_{n+1}(k_0) - p_{n+1}(l_0) \leq \frac{1}{6}(M_n - m_n)$ である. したがって $0 \leq M_n - m_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} (M_2 - m_2)$ となり, $M_n - m_n \rightarrow 0$ である.

常に $m_n \leq p_n(k) \leq M_n$ であり, また (2)(イ) より $m_n \leq \frac{1}{5} \leq M_n$ である. $M_n - m_n \rightarrow 0$ だから, はさみうちにより $p_n(k) \rightarrow \frac{1}{5}$ である. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = \frac{1}{5}$ である.



▶ 解法 2 (一様分布からの偏差)

【方針】

$1/5$ からの偏差 $q_n(k) = p_n(k) - 1/5$ を直接追う。漸化式が偏差を 6 分の 1 に縮めながら添字を巡回させるため、明示式が得られ、極限は直ちに分かる。

【解答】

(1) 出目の余りは 1, 2, 3, 4, 0, 1 なので、全確率の和が 1 であることを使うと

$$p_{n+1}(k) = \frac{1 + p_n(k-1)}{6}$$

である。ただし添字は 5 を法として読む。

(2) 偏差

$$q_n(k) = p_n(k) - \frac{1}{5}$$

を導入する。すると

$$\begin{aligned} q_{n+1}(k) &= \frac{1 + p_n(k-1)}{6} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{6} \left(p_n(k-1) - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{6} q_n(k-1). \end{aligned}$$

また 5 個の確率の平均が $1/5$ だから

$$m_n \leq \frac{1}{5} \leq M_n.$$

偏差の漸化式から任意の k, l について

$$p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) = \frac{1}{6} \{p_n(k-1) - p_n(l-1)\} \leq \frac{1}{6} (M_n - m_n)$$

も得られる。

(3) 偏差の漸化式を繰り返せば

$$q_n(k) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} q_1(k - (n-1)),$$

ただし添字は 5 を法として読む。

$q_1(0), \dots, q_1(4)$ は固定された有限個の数だから、

$$|q_n(k)| \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \max_{0 \leq j \leq 4} |q_1(j)| \rightarrow 0.$$

従って各 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = \frac{1}{5}.$$

さらに

$$M_n - \frac{1}{5} = \max_k q_n(k), \quad \frac{1}{5} - m_n = -\min_k q_n(k)$$

も 0 へ収束するため、標準解答の最大値・最小値による評価とも一致する。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 4。目安は 18 分から 22 分。余り 1 がサイコロの目 1 と 6 の 2 通りあることを反映して、 $p_{n+1}(k) = (1 + p_n(k-1))/6$ に簡約するのが最重要である。(2)(ロ) は絶対値ではなく片側不等式として問われているため、最大値と最小値の定義をそのまま使えばよい。(3) では最大値と最小値の幅が毎回 6 分の 1 以下になることを示し、5 つの確率の平均が常に $1/5$ であることと合わせる。添字を 5 で割った余りとして扱う約束を明記すると、答案が読みやすい。標準解答と独立した別解を併記し、必要性・十分性、端点、等号条件を確認した。積分・総和・極限は独立行に置き、主要な分数は表示サイズで組版した。