

京都大学 2001 年度 文系（後期）

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ が $|\vec{u}| = 1$ 、 $|\vec{u} + 3\vec{v}| = 1$ 、 $|2\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{2}$ を満たす。 $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ 、 $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$ とするとき、 $\triangle OPQ$ の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$p = \vec{u} \cdot \vec{v}$ 、 $q = |\vec{v}|^2$ とおき、二つの長さの条件を平方して連立一次方程式にする。最後に、二辺の内積から三角形の面積を求める。

【解答】

$p = \vec{u} \cdot \vec{v}$ 、 $q = |\vec{v}|^2$ とおく。 $|\vec{u}|^2 = 1$ だから

$$|\vec{u} + 3\vec{v}|^2 = 1 + 6p + 9q = 1,$$

$$|2\vec{u} + \vec{v}|^2 = 4 + 4p + q = 2.$$

従って

$$2p + 3q = 0, \quad 4p + q = -2.$$

これを解くと

$$p = -\frac{3}{5}, \quad q = \frac{2}{5}.$$

$\triangle OPQ$ の面積を S とすれば

$$(2S)^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}.$$

面積は正なので

$$S = \frac{1}{10}.$$

▶ 解法 2（座標を選んで高さを求める）

【方針】

座標軸を回転して $\vec{u} = (1, 0)$ とおく。 $\vec{v} = (p, h)$ とすれば、2つの長さの条件は p と $p^2 + h^2$ の連立式になる。三角形の高さは $|h|$ なので面積を直接読める。

【解答】

座標軸を回転しても長さと面積は変わらないので

$$\vec{u} = (1, 0), \quad \vec{v} = (p, h)$$

とおく。また $q = p^2 + h^2 = |\vec{v}|^2$ とする。

条件を平方すると

$$|\vec{u} + 3\vec{v}|^2 = 1 + 6p + 9q = 1,$$

$$|2\vec{u} + \vec{v}|^2 = 4 + 4p + q = 2.$$

したがって

$$2p + 3q = 0, \quad 4p + q = -2.$$

これを解くと

$$p = -\frac{3}{5}, \quad q = \frac{2}{5}.$$

よって

$$h^2 = q - p^2 = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}.$$

$\triangle OPQ$ の底辺 OP は 1、高さは $|h| = 1/5$ だから、

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

【総評】 難度 4、計算量 4。想定時間は 12 分程度。長さの条件を平方すると未知量は内積と $|\vec{v}|^2$ の二つだけになる。面積公式では S^2 ではなく $(2S)^2$ になる点と、最後に正の平方根を取る点を確認する。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 2 問】

1 または -1 からなる数列 $a_1, \dots, a_n$ のうち m 個が 1、 $n - m$ 個が -1 である。 b_k を

$$b_k = \frac{1}{2} \left(ka_k + \sum_{j=1}^k a_j \right)$$

で定めるとき、集合 $\{b_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

第 k 項までに現れた 1 の個数を r_k とおく。部分和を $2r_k - k$ と表し、 $a_k = 1$ と $a_k = -1$ で分けると、 b_k はそれぞれ「何個目の 1 か」と「何個目の -1 か」を表す。

【解答】

第 k 項までに現れる 1 の個数を r_k とする。このとき

$$\sum_{j=1}^k a_j = r_k - (k - r_k) = 2r_k - k.$$

$a_k = 1$ のとき

$$b_k = \frac{1}{2} \{k + (2r_k - k)\} = r_k.$$

従って、1 が現れるたびに b_k は順に $1, 2, \dots, m$ となる。

一方 $a_k = -1$ のとき

$$b_k = \frac{1}{2} \{-k + (2r_k - k)\} = r_k - k = -(k - r_k).$$

ここで $k - r_k$ は第 k 項までの -1 の個数だから、 -1 が現れるたびに b_k は順に $-1, -2, \dots, -(n - m)$ となる。

よって

$$\{b_k \mid 1 \leq k \leq n\} = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{-1, -2, \dots, -(n - m)\}.$$

$m = 0$ または $m = n$ の場合は、対応する側の集合を空集合と解釈する。

▶ 解法 2 (各符号の出現位置を番号づける)

【方針】

1 が現れる位置を $p_1 < \cdots < p_m$ 、 -1 が現れる位置を $q_1 < \cdots < q_{n-m}$ とおく。それぞれの位置で部分和を数えると、 b_k が出現順そのものになる。

【解答】

1 が現れる位置を

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_m$$

とする。第 p_r 項までには 1 が r 個、 -1 が $p_r - r$ 個あるので

$$\sum_{j=1}^{p_r} a_j = r - (p_r - r) = 2r - p_r.$$

したがって

$$b_{p_r} = \frac{1}{2} \{p_r + (2r - p_r)\} = r.$$

よって 1 が現れる位置からは $1, 2, \dots, m$ がすべて得られる。

同様に、 -1 が現れる位置を

$$q_1 < q_2 < \cdots < q_{n-m}$$

とする。第 q_s 項までには -1 が s 個、1 が $q_s - s$ 個あるから

$$\sum_{j=1}^{q_s} a_j = (q_s - s) - s = q_s - 2s.$$

よって

$$b_{q_s} = \frac{1}{2} \{-q_s + (q_s - 2s)\} = -s.$$

したがって

$$\{b_k \mid 1 \leq k \leq n\} = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{-1, -2, \dots, -(n-m)\}.$$

片方の個数が 0 の場合は、その側を空集合とする。

【総評】 難度 5、計算量 3。想定時間は 15 分程度。並び順を具体的に決める必要はなく、その項までに同じ符号が何回出たかだけを数える。 $b_k = 0$ は一度も現れない。端の場合 $m = 0, n$ も同じ式で処理できるよう、空集合の扱いを明記した。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 3 問】

曲線 $C_1: y = x^3 + 2x^2 + 2$ 上の点 P における接線を L とする。 L と曲線 $C_2: y = 3x^2$ とで囲まれる図形の面積の最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

P の x 座標を t とし、接線を求める。接線と放物線の差は二次式なので、判別式から二交点間の距離を出し、二次式で囲まれる面積公式 $AL^3/6$ を使う。最後は t^2 の二次式を最小化する。

【解答】

P の x 座標を t とする。 $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ とおけば

$$F'(t) = 3t^2 + 4t.$$

従って接線 L は

$$y = (3t^2 + 4t)x - 2t^3 - 2t^2 + 2$$

である。これと $y = 3x^2$ の交点の x 座標は

$$3x^2 - (3t^2 + 4t)x + 2t^3 + 2t^2 - 2 = 0$$

の二根である。この二次方程式の判別式は

$$D = (3t^2 + 4t)^2 - 12(2t^3 + 2t^2 - 2) = 9t^4 - 8t^2 + 24.$$

$u = t^2 \geq 0$ とすれば

$$D = 9u^2 - 8u + 24 = 9\left(u - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{200}{9} > 0$$

だから、常に異なる二交点をもつ。

二根を $r_1 < r_2$ とすると

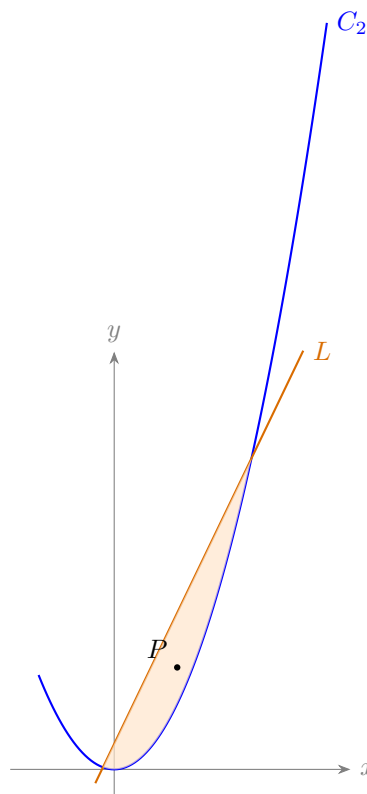
$$r_2 - r_1 = \frac{\sqrt{D}}{3}.$$

接線が放物線より上にある区間での差は $3(x - r_1)(r_2 - x)$ なので、面積 S は

$$S = 3 \int_{r_1}^{r_2} (x - r_1)(r_2 - x) dx = \frac{(r_2 - r_1)^3}{2} = \frac{D^{3/2}}{54}.$$

これは D が最小のとき最小となる。 $u = 4/9$ 、すなわち $t = \pm 2/3$ のとき $D = 200/9$ だから

$$S_{\min} = \frac{1}{54} \left(\frac{200}{9}\right)^{3/2} = \frac{1000\sqrt{2}}{729}.$$



▶ 解法 2 (放物線の頂点と高さで面積を表す)

【方針】

接線と放物線の差を、下に開く放物線 $h - 3(x - c)^2$ の形で見ると。頂点の高さ h は判別式から求め、面積はこの標準形を直接積分できる。最後に t^2 について平方完成する。

【解答】

接線の x 座標を t とすると、接線は

$$L: y = (3t^2 + 4t)x - 2t^3 - 2t^2 + 2.$$

接線と $y = 3x^2$ の差を $H_t(x)$ とおけば

$$H_t(x) = -3x^2 + (3t^2 + 4t)x - 2t^3 - 2t^2 + 2.$$

この二次式の判別式は

$$D = 9t^4 - 8t^2 + 24.$$

$H_t(x)$ を頂点形式

$$H_t(x) = h - 3(x - c)^2$$

と書くと、二根の間隔が $2\sqrt{h/3}$ である一方、二次方程式の根の差は $\sqrt{D}/3$ だから

$$h = \frac{D}{12}.$$

囲まれる面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{c-\sqrt{h/3}}^{c+\sqrt{h/3}} \{h - 3(x - c)^2\} dx \\ &= \frac{4h^{3/2}}{3\sqrt{3}} = \frac{D^{3/2}}{54}. \end{aligned}$$

したがって D を最小にすればよい。 $u = t^2 \geq 0$ とおくと

$$D = 9u^2 - 8u + 24 = 9\left(u - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{200}{9}.$$

よって $t^2 = 4/9$ のとき最小となり、

$$S_{\min} = \frac{1}{54} \left(\frac{200}{9}\right)^{3/2} = \frac{1000\sqrt{2}}{729}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 25 分程度。交点を個別に解く必要はなく、判別式から根の差だけを取り出すと短い。面積公式の先頭係数 3 と $1/6$ を合わせて $(r_2 - r_1)^3/2$ になる。最小化では $u = t^2 \geq 0$ の範囲も確認する。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性和十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 4 問】

複素数平面上の単位円に内接し、1 を頂点にもつ正五角形を考える。その辺を延長した直線どうしの交点のうち、元の頂点以外で実部・虚部がともに正のものを z とする。

(1) $\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ とするとき、 z を α で表せ。

(2) 3 点 $1, \alpha^2, z$ を通る円が原点を通ることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

単位円上の 2 点 u, v を結ぶ直線を $w + uv\bar{w} = u + v$ と表す。第 1 象限の交点は辺 $\alpha\alpha^2$ と辺 $\alpha^4 1$ の延長の交点である。(2) は 4 点の複比が実数になることを示す。

【解答】

(1) 単位円上の異なる 2 点 u, v を通る直線は

$$w + uv\bar{w} = u + v$$

と表せる。実際、 $|u| = |v| = 1$ を用いれば $w = u, v$ はこの式を満たし、これは $w, \bar{w}$ に関する実一次方程式である。

正五角形の頂点を $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ と反時計回りに並べる。第 1 象限にある求める交点は、辺 $\alpha\alpha^2$ と辺 $\alpha^4 1$ の延長の交点である。従って

$$z + \alpha^3\bar{z} = \alpha + \alpha^2, \quad z + \alpha^4\bar{z} = 1 + \alpha^4.$$

$\alpha^5 = 1$ および $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ を用いて連立すると

$$z = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 + \alpha^2}.$$

なお $1 + \alpha$ の偏角は 36° で、係数 $\alpha/(1 + \alpha^2) = 1/(\alpha + \alpha^4) > 0$ だから、この z は確かに第 1 象限にある。

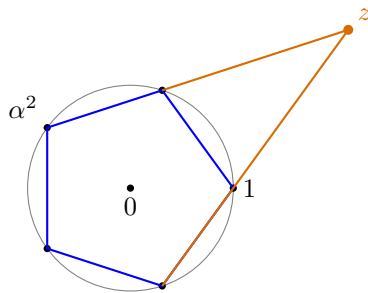
(2) 4 点 $0, 1, \alpha^2, z$ が同一円周上にあるための必要十分条件は、これらが同一直線上にない本問では

$$\frac{(z - 1)(0 - \alpha^2)}{(z - \alpha^2)(0 - 1)} = \alpha^2 \frac{z - 1}{z - \alpha^2}$$

が実数となることである。(1) の式を代入すると

$$\alpha^2 \frac{z - 1}{z - \alpha^2} = \alpha^2 \frac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^4} = -(\alpha + \alpha^4).$$

右辺は $-2 \cos 72^\circ$ で実数である。従って $0, 1, \alpha^2, z$ は同一円周上にあり、3 点 $1, \alpha^2, z$ を通る円は原点を通る。



▶ 解法 2 (極形式と円の方程式で示す)

【方針】

交点の式を極形式へ直し、 $z = \varphi^2(\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ)$ と読む。原点・ $1 \cdot \alpha^2$ を通る円を実座標で書き、この z が円の方程式を満たすことを確認する。

【解答】

(1)

辺の直線を連立すると

$$z = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 + \alpha^2}$$

を得る。ここで

$$1 + \alpha = 2 \cos 36^\circ e^{36^\circ i}, \quad 1 + \alpha^2 = 2 \cos 72^\circ e^{72^\circ i}.$$

したがって

$$z = \frac{\cos 36^\circ}{\cos 72^\circ} e^{36^\circ i}.$$

$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 2 \cos 36^\circ$ とおけば $\cos 72^\circ = (\varphi - 1)/2$ だから

$$z = \varphi^2(\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ).$$

これは確かに第 1 象限の点である。

(2)

$0, 1, \alpha^2 = (\cos 144^\circ, \sin 144^\circ)$ を通る円は

$$x^2 + y^2 - x - \cot 18^\circ y = 0$$

である。実際、原点と $(1, 0)$ を通り、 α^2 を代入しても

$$1 - \cos 144^\circ - \cot 18^\circ \sin 144^\circ = 0$$

となる。

$z = (\varphi^2 \cos 36^\circ, \varphi^2 \sin 36^\circ)$ を左辺へ代入すると

$$\varphi^2\{\varphi^2 - \cos 36^\circ - \cot 18^\circ \sin 36^\circ\}.$$

ところが

$$\cos 36^\circ + \cot 18^\circ \sin 36^\circ = \cos 36^\circ + 2 \cos^2 18^\circ = 1 + 2 \cos 36^\circ = \varphi^2.$$

よって上式は 0 であり、 z もこの円上にある。したがって 3 点 $1, \alpha^2, z$ を通る円は原点を通る。

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 30 分程度。どの 2 辺の延長が第 1 象限で交わるかを図で先に特定する。直線の複素方程式と複比の実数条件を使うと、座標の連立計算を避けられる。最後は $\alpha + \alpha^4$ が共役な 2 数の和で実数であることを確認する。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 5 問】

青玉 a 個、赤玉 b 個、白玉 c 個、合計 $N = a + b + c$ 個の玉が入った袋から、1 個を無作為に取り出して戻す試行を n 回行う。取り出された玉の色の種類数の期待値を E_n とするとき、

$$E_n = 3 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n$$

を示せ。

▶ 解法 1

【方針】

各色について「その色が一度でも出たら 1、出なければ 0」となる指示変数を置く。色の種類数は 3 個の指示変数の和であり、各期待値は「一度も出ない」余事象から求める。

【解答】

青・赤・白について、それぞれ一度でも取り出されたとき 1、そうでないとき 0 となる確率変数を X_B, X_R, X_W とする。取り出された色の種類数を X とすれば

$$X = X_B + X_R + X_W.$$

青が 1 回の試行で出ない確率は $(b+c)/N$ であり、各試行は独立だから、 n 回とも青が出ない確率は

$$\left(\frac{b+c}{N}\right)^n.$$

従って

$$E[X_B] = 1 - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n.$$

同様に

$$E[X_R] = 1 - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n, \quad E[X_W] = 1 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n.$$

期待値の加法性より

$$\begin{aligned} E_n = E[X] &= E[X_B] + E[X_R] + E[X_W] \\ &= 3 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

これで示された。

▶ 解法 2 (種類数の尾確率を足す)

【方針】

種類数 X は 1, 2, 3 のいずれかなので $E[X] = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3)$ を用いる。 $X \geq 2$ と $X = 3$ を余事象・包除原理で計算すると単色項が消える。

【解答】

取り出された色の種類数を X とする。 $n \geq 1$ では

$$E[X] = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3)$$

である。まず $P(X \geq 1) = 1$ である。

1 色しか出ない確率は

$$P(X = 1) = \left(\frac{a}{N}\right)^n + \left(\frac{b}{N}\right)^n + \left(\frac{c}{N}\right)^n$$

だから

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{a}{N}\right)^n - \left(\frac{b}{N}\right)^n - \left(\frac{c}{N}\right)^n.$$

3 色すべてが出る確率は、少なくとも 1 色が出ない事象に包除原理を用いて

$$P(X = 3) = 1 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n \\ + \left(\frac{a}{N}\right)^n + \left(\frac{b}{N}\right)^n + \left(\frac{c}{N}\right)^n.$$

以上を足すと単色だけの 3 項が消え、

$$E_n = 3 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n$$

を得る。

【総評】 難度 4、計算量 3。想定時間は 10 分程度。色数そのものの分布を場合分けするより、各色の出現を $0 \cdot 1$ で数えると短い。期待値の加法性には各色の出現事象の独立性は不要であり、同じ色が一度も出ない確率を求める段階だけ試行の独立性を使う。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。