

京都大学 2001 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

方程式

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 5 = 0$$

を満たす正の整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

左辺の二次形式を $(x - y - z)^2 + y^2 + z^2$ と平方完成する。 y, z が正の整数であることから $y^2 + z^2 \leq 5$ を満たす組を有限個に絞る。

【解答】

与式は

$$(x - y - z)^2 + y^2 + z^2 = 5$$

と書き直せる。従って

$$y^2 + z^2 \leq 5.$$

 y, z は正の整数だから、候補は

$$(y, z) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$$

だけである。

 $(y, z) = (1, 1)$ のときは

$$(x - 2)^2 = 3$$

となり、整数 x は存在しない。 $(y, z) = (1, 2)$ または $(2, 1)$ のときは $y^2 + z^2 = 5$ なので

$$(x - y - z)^2 = 0,$$

従って $x = y + z = 3$ である。

以上より求める組は

$$(x, y, z) = (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

どちらも元の式を満たす。

▶ 解法 2 (5 の平方数分割を列挙する)

【方針】

二次形式を 3 個の平方の和へ直す。正の y, z の平方を含む 5 の分割は $5 = 0 + 1 + 4$ しかないため、順序だけを戻して x を決める。

【解答】

与えられた式は

$$(x - y - z)^2 + y^2 + z^2 = 5$$

と同値である。左辺は 3 個の整数の平方の和であり、 y, z は正の整数である。

5 以下の平方数は 0, 1, 4 だけである。 y^2, z^2 は 0 ではないので、3 個の平方の組は

$$\{(x - y - z)^2, y^2, z^2\} = \{0, 1, 4\}$$

でなければならない。特に

$$(x - y - z)^2 = 0, \quad \{y, z\} = \{1, 2\}.$$

したがって $x = y + z = 3$ であり、

$$(x, y, z) = (3, 1, 2), \quad (3, 2, 1).$$

代入すれば、どちらも元の方程式を満たす。

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 12 分程度。交差項を見て $(x - y - z)^2$ を作ると残りが $y^2 + z^2$ になる。正の整数条件により候補は 3 組しかなく、最後に元の式への代入確認まで行えば漏れがない。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 2 問】

$f_1(x) = 1$ 、 $n \geq 2$ で $f_n(x) = (1 + x)f_{n-1}(x^2)$ と定める。 $g_n(x) = (1 - x)f_n(x)$ とするとき、 $g_n(x)$ を求めよ。また、 $n \rightarrow \infty$ のとき $f_n(x)$ が収束する実数 x の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$(1 - x)$ を掛けた形は差の平方を作るので、 g_n の漸化式を求めて帰納する。得られた $(1 - x)f_n(x) = 1 - x^{2^{n-1}}$ を使い、 $|x| < 1$ 、 $x = -1$ 、その他に分けて極限を判定する。

【解答】

$n = 1$ では

$$g_1(x) = 1 - x.$$

$n \geq 2$ では

$$\begin{aligned} g_n(x) &= (1 - x)(1 + x)f_{n-1}(x^2) \\ &= (1 - x^2)f_{n-1}(x^2) \\ &= g_{n-1}(x^2). \end{aligned}$$

従って帰納法により

$$g_n(x) = 1 - x^{2^{n-1}}$$

である。

実際、 $n \geq 2$ なら

$$f_n(x) = (1 + x)(1 + x^2) \cdots (1 + x^{2^{n-2}})$$

であり、上の恒等式と一致する。

次に収束範囲を調べる。 $x \neq 1$ では

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2^{n-1}}}{1 - x}.$$

$-1 < x < 1$ なら $x^{2^{n-1}} \rightarrow 0$ だから

$$f_n(x) \rightarrow \frac{1}{1-x}.$$

$x = -1$ では $n \geq 2$ で $f_n(-1) = 0$ だから収束する。一方 $x = 1$ では $f_n(1) = 2^{n-1}$ で発散する。 $|x| > 1$ では $x^{2^{n-1}} \rightarrow +\infty$ となり、上式の絶対値が無限に大きくなるので収束しない。

従って求める範囲は

$$-1 \leq x < 1.$$

▶ 解法 2 (積を直接展開して差の平方を使う)

【方針】

漸化式を繰り返して $f_n(x) = (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-2}})$ と書く。 $(1-x)(1+x) = 1-x^2$ を順に使えば積が望遠鏡式に消え、その閉じた式から端点を含めて収束を判定できる。

【解答】

漸化式を繰り返すと、 $n \geq 2$ について

$$f_n(x) = (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-2}})$$

である。よって

$$\begin{aligned} g_n(x) &= (1-x)(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-2}}) \\ &= (1-x^2)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-2}}) \\ &= 1-x^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

$n = 1$ でも $g_1(x) = 1-x$ なので同じ式が成り立つ。

$x \neq 1$ なら

$$f_n(x) = \frac{1-x^{2^{n-1}}}{1-x}.$$

$|x| < 1$ では $x^{2^{n-1}} \rightarrow 0$ だから収束する。 $x = -1$ では $n \geq 2$ で最初の因子 $1+x$ が 0 となり、やはり収束する。

$x = 1$ では $f_n(1) = 2^{n-1}$ で発散する。 $|x| > 1$ では $x^{2^{n-1}} \rightarrow +\infty$ だから絶対値が発散する。したがって収束する範囲は

$$-1 \leq x < 1$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 18 分程度。 $x = -1$ は $|x| < 1$ に含まれないが途中から 0 になるため収束し、 $x = 1$ は分母表示が使えないので必ず別扱いする。有限積は因子を列記し、禁止記法に依存しない。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性和十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 3 問】

複素数平面上の単位円に内接し、1 を頂点にもつ正五角形を考える。その辺を延長した直線どうしの交点のうち、元の頂点以外で実部・虚部がともに正のものを z とする。

- (1) $\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とするとき、 z を α で表せ。
 (2) 3 点 $1, \alpha^2, z$ を通る円が原点を通ることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

単位円上の 2 点 u, v を通る直線を $w + uv\bar{w} = u + v$ と表す。第 1 象限の交点は辺 $\alpha\alpha^2$ と辺 $\alpha^4 1$ の延長の交点である。(2) は 4 点の複比が実数になることを示す。

【解答】

(1) 単位円上の異なる 2 点 u, v を通る直線は

$$w + uv\bar{w} = u + v$$

と表せる。正五角形の頂点を $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ と並べると、求める交点は辺 $\alpha\alpha^2$ と辺 $\alpha^4 1$ の延長の交点である。従って

$$z + \alpha^3\bar{z} = \alpha + \alpha^2, \quad z + \alpha^4\bar{z} = 1 + \alpha^4.$$

$\alpha^5 = 1, 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ を用いて解くと

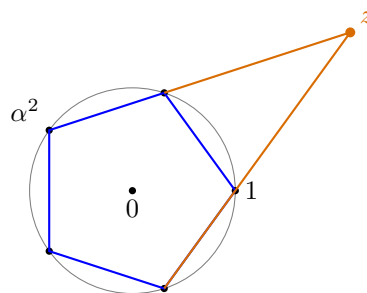
$$z = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 + \alpha^2}.$$

係数 $\alpha/(1 + \alpha^2) = 1/(\alpha + \alpha^4) > 0$ で、 $1 + \alpha$ の偏角は $\pi/5$ だから、この点は第 1 象限にある。

(2) 4 点 $0, 1, \alpha^2, z$ の複比を調べる。(1) の式から

$$\frac{(z - 1)(0 - \alpha^2)}{(z - \alpha^2)(0 - 1)} = \alpha^2 \frac{z - 1}{z - \alpha^2} = \alpha^2 \frac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^4} = -(\alpha + \alpha^4).$$

右辺は $-2 \cos(2\pi/5)$ で実数である。従って $0, 1, \alpha^2, z$ は同一円周上にあり、3 点 $1, \alpha^2, z$ を通る円は原点を通る。



▶ 解法 2 (極形式と円の方程式で示す)

【方針】

交点の式を極形式へ直し、 $z = \varphi^2 e^{\pi i/5}$ と読む。原点・ $1 \cdot \alpha^2$ を通る円を実座標で書き、この z がその方程式を満たすことを確認する。

【解答】

(1)

2 本の辺の直線を連立すると

$$z = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 + \alpha^2}.$$

また

$$1 + \alpha = 2 \cos \frac{\pi}{5} e^{\pi i/5}, \quad 1 + \alpha^2 = 2 \cos \frac{2\pi}{5} e^{2\pi i/5}.$$

したがって

$$z = \frac{\cos(\pi/5)}{\cos(2\pi/5)} e^{\pi i/5}.$$

$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 2 \cos(\pi/5)$ とおけば

$$z = \varphi^2 e^{\pi i/5}.$$

(2)

$0, 1, \alpha^2 = (\cos(4\pi/5), \sin(4\pi/5))$ を通る円は

$$x^2 + y^2 - x - \cot \frac{\pi}{10} y = 0$$

である。ここへ

$$z = (\varphi^2 \cos(\pi/5), \varphi^2 \sin(\pi/5))$$

を代入すると、左辺は

$$\varphi^2 \left\{ \varphi^2 - \cos \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{5} \right\}.$$

ところが

$$\cos \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{5} = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{5} = \varphi^2.$$

よって左辺は 0 であり、 z はこの円上にある。したがって 3 点 $1, \alpha^2, z$ を通る円は原点を通る。

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 30 分程度。文系第 4 問と同一内容だが、角をラジアンで扱う。第 1 象限の交点を構成する 2 直線を先に決め、直線の複素方程式を連立する。(2) は複比が実数であることを最後まで簡約する。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 4 問】

負でない実数 a の小数部分を $\{a\}$ と表す。

- (1) $\{n \log_{10} 2\} < 0.02$ となる正の整数 n を 1 つ求めよ。
 (2) 10 進表示で 2^n の最高位の数字が 7 となる正の整数 n を 1 つ求めよ。ただし $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ 、 $0.8450 < \log_{10} 7 < 0.8451$ とする。

▶ 解法 1

【方針】

(1) $\log_{10} 2$ の近似範囲を 10 倍して、整数のすぐ上に来る例を作る。(2) 最高位が 7 である条件を、小数部分が $[\log_{10} 7, \log_{10} 8)$ に入ることと言い換え、与えられた粗い評価だけで判定できる n を探す。

【解答】

(1) 与えられた評価を 10 倍すると

$$3.010 < 10 \log_{10} 2 < 3.011.$$

従って

$$0.010 < \{10 \log_{10} 2\} < 0.011 < 0.02.$$

よって一例は

$$n = 10$$

である。

(2) $n \log_{10} 2 = M + r$ ($M \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < 1$) と書くと

$$2^n = 10^M 10^r.$$

従って最高位が 7 であるための条件は

$$\log_{10} 7 \leq r < \log_{10} 8$$

である。

$n = 46$ とする。与えられた評価から

$$13.8460 < 46 \log_{10} 2 < 13.8506$$

だから

$$0.8460 < \{46 \log_{10} 2\} < 0.8506.$$

一方

$$\log_{10} 7 < 0.8451 < 0.8460$$

であり、また

$$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 > 0.9030 > 0.8506.$$

従って

$$\log_{10} 7 < \{46 \log_{10} 2\} < \log_{10} 8.$$

よって一例は

$$n = 46$$

である。

▶ 解法 2 (整数の累乗を直接計算する)

【方針】

小数部分の条件は $2^{10} = 1024$ から直ちに得る。最高位については同じ 10 乗のかたまりを使い、 $2^{46} = 64(2^{10})^4$ を整数として計算して先頭を読む。

【解答】

(1)

$$2^{10} = 1024 = 1.024 \times 10^3$$

だから

$$10 \log_{10} 2 = 3 + \log_{10} 1.024.$$

$1 < 1.024 < 10^{0.02}$ であることは、与えられた評価

$$3.010 < 10 \log_{10} 2 < 3.011$$

からも分かる。したがって

$$\{10 \log_{10} 2\} < 0.02$$

であり、一例は $n = 10$ である。

(2)

繰り返し二乗すると

$$2^{20} = 1\,048\,576, \quad 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776.$$

したがって

$$2^{46} = 64 \cdot 2^{40} = 70\,368\,744\,177\,664.$$

最高位の数字は 7 なので、一例は

$$n = 46$$

である。これは与えられた対数評価から得られる $\log_{10} 7 < \{46 \log_{10} 2\} < \log_{10} 8$ とも一致する。

【総評】 難度 6、計算量 4。想定時間は 18 分程度。(1) の 10 倍が (2) の候補探索の手掛かりになる。最高位の条件は常用対数の整数部分ではなく小数部分で決まる。与えられた上下評価だけで区間包含を証明し、電卓の近似値には依存していない。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 5 問】

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。連立方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}$$

には解が存在し、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5-s \end{pmatrix}$$

には解が存在しないとする。

(1) A の各列ベクトルは

$$\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}$$

の実数倍であることを示せ。

(2) この条件を満たす連立方程式を作れるための s の条件を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

行列の列ベクトルが張る集合を考える。第 1 の右辺はその集合に入り、第 2 の右辺は入らないので、列空間は平面全体ではなく、第 1 の右辺が張る直線になる。(2) は二つの右辺が平行でないことを 2 次行列式で判定する。

【解答】

(1)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5-s \end{pmatrix}$$

とおく。第 1 の方程式に解があるから $\mathbf{w}$ は $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の一次結合である。第 2 の方程式に解がないから $\mathbf{t}$ はその一次結合ではない。

もし $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が一次独立なら、任意の平面ベクトル、特に $\mathbf{t}$ がその一次結合となり矛盾する。従って両列は一次従属である。また $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ であり、 $\mathbf{w}$ は両列の一次結合だから、両列が張る直線は $\mathbf{w}$ が張る直線に一致する。従って $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ はともに $\mathbf{w}$ の実数倍である。

(2) (1) より、第 2 の方程式に解がないための条件は $\mathbf{t}$ が $\mathbf{w}$ の実数倍でないことである。これは

$$\det \begin{pmatrix} s & 4 \\ 1-s & 5-s \end{pmatrix} \neq 0$$

と同値である。左辺は

$$s(5-s) - 4(1-s) = -s^2 + 9s - 4.$$

従って

$$s^2 - 9s + 4 \neq 0,$$

すなわち

$$s \neq \frac{9 + \sqrt{65}}{2}, \quad s \neq \frac{9 - \sqrt{65}}{2}.$$

逆にこの条件を満たすなら、例えば A の第 1 列を $\mathbf{w}$ 、第 2 列を零ベクトルとすれば、第 1 の方程式には $(x, y) = (1, 0)$ という解があり、第 2 の右辺 $\mathbf{t}$ は列の張る直線上にないので第 2 の方程式には解がない。従って上の条件は必要十分である。

▶ 解法 2 (行列式と列の張る範囲で判定する)

【方針】

第 2 の方程式に解がないので A は正則ではない。一方、第 1 の右辺は零ベクトルでなく列の一次結合だから、列の張る範囲はその右辺が張る直線に一致する。(2) は 2 つの右辺の行列式を調べる。

【解答】

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5-s \end{pmatrix}$$

とおく。

(1)

もし $\det A \neq 0$ なら、任意の右辺に対して

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{t}$$

は解をもつ。これは仮定に反するから

$$\det A = 0.$$

したがって A の 2 本の列は一次従属である。

第 1 の方程式に解があるので $\boldsymbol{w}$ は列の一次結合である。しかも $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$ だから、少なくとも 1 本の列は零でなく、2 本の列が張る集合は $\boldsymbol{w}$ が張る直線に一致する。よって各列は $\boldsymbol{w}$ の実数倍である。

(2)

第 2 の方程式に解がないための必要十分条件は、 $\boldsymbol{t}$ が $\boldsymbol{w}$ の実数倍でないことである。すなわち

$$\det \begin{pmatrix} s & 4 \\ 1-s & 5-s \end{pmatrix} = -s^2 + 9s - 4 \neq 0.$$

したがって

$$s \neq \frac{9 + \sqrt{65}}{2}, \quad s \neq \frac{9 - \sqrt{65}}{2}.$$

逆にこの条件のもとで A の第 1 列を $\boldsymbol{w}$ 、第 2 列を零列とすれば、第 1 の方程式には解があり、第 2 の方程式には解がない。よってこの条件は必要十分である。

【総評】 難度 7、計算量 5。想定時間は 25 分程度。階数という語を使わなくても、二列が平面全体を張るか直線だけを張るかで説明できる。(2) では必要条件だけで終わらず、実際に行列を 1 つ構成して十分性まで確認する。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 6 問】

単位円 C_1 と、 $-1 < a < -1/2$ を満たす点 $R(a, 0)$ を考える。 C_1 上の点 P における接線と、 R を通りこの接線に直交する直線との交点を Q とする。 P が一周するとき Q が描く曲線を C_2 とする。 C_2 上の点の x 座標の最小値が -1 より小さいことを示し、 C_2 で囲まれる面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$P = (\cos t, \sin t)$ とおく。接線は $x \cos t + y \sin t = 1$ 、これに垂直な直線は半径方向なので $Q = R + \lambda P$ と置いて λ を決める。得られる媒介表示から x を平方完成し、面積は

$$\frac{1}{2} \int (xy' - yx') dt$$

で求める。

【解答】

$P = (\cos t, \sin t)$ とおく。 P における単位円の接線は

$$x \cos t + y \sin t = 1$$

である。この接線に垂直な方向は $(\cos t, \sin t)$ だから

$$Q = (a, 0) + \lambda(\cos t, \sin t)$$

と書ける。接線の式へ代入すると $a \cos t + \lambda = 1$ より $\lambda = 1 - a \cos t$ である。従って

$$\begin{aligned} x(t) &= a + \cos t - a \cos^2 t = \frac{a}{2} + \cos t - \frac{a}{2} \cos 2t, \\ y(t) &= \sin t - a \sin t \cos t = \sin t - \frac{a}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

まず $c = \cos t$ とおくと

$$x = -ac^2 + c + a = -a \left(c - \frac{1}{2a} \right)^2 + a + \frac{1}{4a}.$$

$-1 < a < -1/2$ では $1/(2a) \in (-1, -1/2)$ であり、 $-a > 0$ だから

$$\min x = a + \frac{1}{4a}.$$

さらに

$$a + \frac{1}{4a} + 1 = \frac{(2a+1)^2}{4a} < 0$$

なので $\min x < -1$ である。

面積を求める前に曲線が単純閉曲線であることを確認する。 $u = e^{it}$ とすれば

$$x + iy = \frac{a}{2} + u - \frac{a}{2} u^2.$$

異なる u, v が同じ点を与えるなら

$$(u - v) \left\{ 1 - \frac{a}{2}(u + v) \right\} = 0$$

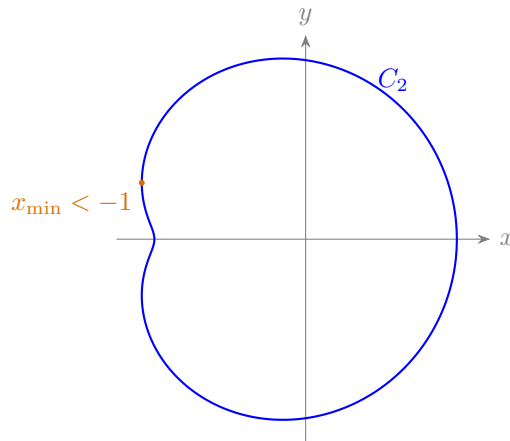
だが、 $|a(u + v)/2| \leq |a| < 1$ なので第 2 因子は 0 にならない。従って一周で重なりはない。

囲まれる面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{xy' - yx'\} dt.$$

上の媒介表示を代入する。異なる周波数の三角関数の積の積分は 0 であり、 $\cos t, \sin t$ の組と $-(a/2) \cos 2t, -(a/2) \sin 2t$ の組だけが残るから

$$S = \pi \left\{ 1 + 2 \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right\} = \pi \left(1 + \frac{a^2}{2} \right).$$



▶ 解法 2 (微分と三角関数の直交性で計算する)

【方針】

媒介表示を得た後、 x は $\cos t$ の二次関数として微分し、内部の極小点と端点を比較する。面積公式には媒介表示を直接代入し、周期の異なる積分が 0 になることを使う。

【解答】

主解法と同じく

$$x = a + \cos t - a \cos^2 t, \quad y = \sin t - a \sin t \cos t$$

を得る。

$c = \cos t \in [-1, 1]$ とおくと

$$x(c) = a + c - ac^2, \quad \frac{dx}{dc} = 1 - 2ac.$$

$-1 < a < -1/2$ では $c = 1/(2a)$ が $(-1, 0)$ にあり、 $-a > 0$ なのでここで最小となる。したがって

$$x_{\min} = a + \frac{1}{4a}.$$

さらに

$$x_{\min} + 1 = \frac{(2a + 1)^2}{4a} < 0$$

より $x_{\min} < -1$ である。

また

$$x = \frac{a}{2} + \cos t - \frac{a}{2} \cos 2t, \quad y = \sin t - \frac{a}{2} \sin 2t.$$

面積公式

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt$$

へ代入する。定数項と正弦・余弦の積、および異なる周波数どうしの積は一周期の積分で 0 になる。周波数 1 の円成分から π 、周波数 2 で半径 $|a|/2$ の成分から

$$2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

が残る。よって

$$S = \pi + \frac{\pi a^2}{2} = \pi \left(1 + \frac{a^2}{2}\right).$$

【総評】 難度 8、計算量 8。想定時間は 35 分程度。 Q は点 R から接線へ下ろした垂線の足であり、その方向が半径 OP と平行になる。最小値の頂点が $[-1, 1]$ 内にあることを確認する。面積公式の前に自己交差がないことも示し、符号付き面積だけで済ませない。2 つの解法は標準的な答案手順と、別の構造から検算できる経路に分けた。必要性と十分性、場合分け、端点・等号条件を明示し、積分・総和・極限と主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。