

京都大学 2002 年度 文系（後期）

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

1 から n ($n \geq 2$) までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚の札が袋に入っている. この袋から札を 1 枚ずつ取り出し, 次のルールに従って A または B の箱に入れる.

- (i) 最初に取り出した札は A の箱に入れる.
- (ii) 2 番目以降の札は, その番号がそれまでの札の番号のどれよりも大きければ A の箱に入れ, そうでなければ B の箱に入れる.

全札を入れ終わったとき, 箱 B にちょうど 1 枚の札が入っている確率を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

箱 A に入る札は, 順列を左から見たときの新記録である. したがって箱 B が 1 枚とは, 新記録でない項がちょうど 1 つの順列を数えることになる. 最小札 1 を挿入する帰納的な数え上げで個数を求める.

【解答】

条件を満たす順列の個数を N_n とする. 番号 1 を除いた $2, 3, \dots, n$ の相対的な順序を考える.

1 を先頭に置く場合, 1 は新記録になり, 残りの順列には新記録でない項がちょうど 1 つ必要だから N_{n-1} 通りである. 一方, $2, 3, \dots, n$ を増加順に並べ, その先頭以外の $n-1$ 箇所のいずれかへ 1 を挿入すれば, 1 だけが新記録でない項になる. 逆に, 1 が先頭でない場合に他の項がすべて新記録となるには, 他の札は増加順でなければならない. よって

$$N_n = N_{n-1} + n - 1, \quad N_2 = 1.$$

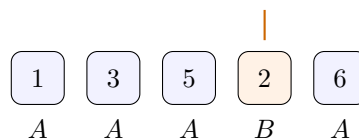
したがって

$$N_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

全順列は $n!$ 通りなので, 求める確率は

$$\frac{N_n}{n!} = \frac{n(n-1)}{2n!} = \frac{1}{2(n-2)!}.$$

唯一の非記録



▶ 解法 2

【方針】

箱 B に入る唯一の札を k とする。その札を取り除くと、残りはすべて取り出すたびに新記録になるため昇順でなければならない。逆に、昇順列へ k を自分より大きい札の直後に挿入すれば、 k だけが箱 B に入る。この一対一対応で直接数える。

【解答】

箱 B に入る札を k とする。 k を取り出した列から除くと、残る札はすべて、それ以前のどの札よりも大きい。したがって残りの札の順序は昇順である。

k の直前にある札を j とすれば、 k が箱 B に入るため $k < j$ である。逆に、任意の組

$$1 \leq k < j \leq n$$

に対し、 k を除く札を昇順に並べ、その列で j の直後へ k を挿入する。すると k だけが新記録でなく、ほかはすべて新記録になる。よって条件を満たす順列と組 (k, j) は一対一に対応する。

その個数は

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

全順列 $n!$ 通りは等確率なので、求める確率は

$$\frac{n(n-1)}{2n!} = \frac{1}{2(n-2)!}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 3。目安時間は 14 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

箱 A の札は左から見た新記録である。唯一の非記録札を除けば昇順になるという一対一対応を明記すると、過不足のない数え上げになる。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

■ 【第 2 問】 ■

次の連立不等式を満たす xy 平面内の領域を D とする。

$$4y + x - 10 \leq 0, \quad y - x \geq 0, \quad y + 4x + 5 \geq 0$$

点 $P(x, y)$ が領域 D を動くとき、

$$F = -2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) - 6xy(x + y - 1) + 12(x + y) - 5$$

の最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$s = x + y, p = xy$ と置いて対称式を整理すると、 p の項がすべて消えて F は s だけの 3 次式になる。三角形領域 D 上で一次式 $s = x + y$ が取る範囲を頂点から決め、その閉区間で 3 次関数を最大・最小化する。

【解答】

$s = x + y, p = xy$ とおく。 $x^3 + y^3 = s^3 - 3ps$, $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$ を代入すると

$$F = -2s^3 + 3s^2 + 12s - 5.$$

領域 D は 3 直線で囲まれる三角形で、その頂点は

$$(2, 2), \quad (-2, 3), \quad (-1, -1)$$

である。したがって一次式 $s = x + y$ の範囲は

$$-2 \leq s \leq 4.$$

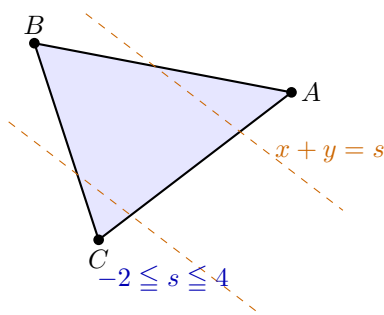
$H(s) = -2s^3 + 3s^2 + 12s - 5$ とおくと

$$H'(s) = -6(s-2)(s+1).$$

端点と停留点での値は

$$H(-2) = -1, \quad H(-1) = -12, \quad H(2) = 15, \quad H(4) = -37.$$

よって最大値は 15、最小値は -37 である。



▶ 解法 2

【方針】

対称式を $s = x + y$ で整理したあと、直線 $x + y = s$ を領域 D 上で平行移動させる。三角形の 3 頂点で s の最小値・最大値を確定し、1 変数関数 $H(s)$ の増減表から端点と停留点を比較する。

【解答】

$s = x + y$, $p = xy$ とおくと

$$x^3 + y^3 = s^3 - 3ps, \quad x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

であり、代入後に p の項は消える。したがって

$$F = H(s) = -2s^3 + 3s^2 + 12s - 5.$$

境界 3 直線の交点は

$$(2, 2), \quad (-2, 3), \quad (-1, -1).$$

$s = x + y$ は一次式なので、三角形 D 上の範囲は頂点で決まり

$$-2 \leq s \leq 4.$$

また

$$H'(s) = -6(s-2)(s+1).$$

よって候補値は

$$H(-2) = -1, \quad H(-1) = -12, \quad H(2) = 15, \quad H(4) = -37.$$

これらを比較して、最大値は 15、最小値は -37 である。最大値は $x + y = 2$ と D の交わる部分で、最小値は頂点 $(2, 2)$ での値。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 5。目安時間は 14 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

対称式の整理で xy が完全に消える点が最大の発見である。一次式 $x + y$ の範囲は三角形の頂点で決まり、1 変数化後は端点も必ず比較する。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

【第 3 問】

各面が鋭角三角形からなる四面体 $ABCD$ において、辺 AB と辺 CD は垂直ではないとする。辺 AB を含む平面 α に点 C, D から下ろした垂線の足をそれぞれ C', D' とするとき、4 点 A, B, C', D' がすべて相異なり、しかも同一円周上にあるように α がとれることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

A, B を結ぶ方向を第 1 座標軸とし、その垂直平面内の単位ベクトル e で射影平面 α を表す。射影点 C', D' の平面座標を $(c, u), (d, v)$ と書けば、4 点が共円である条件は 1 本の連続方程式になる。 e を C の垂直成分に直交する向きから D の垂直成分に直交する向きまで動かし、両端で符号が逆になることを示す。

【解答】

$AB = 1$ となるよう尺度を取り、

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (c, \mathbf{u}), \quad D = (d, \mathbf{v})$$

と表す。太字部分は AB に垂直な 2 次元平面内のベクトルである。面 ABC, ABD は鋭角三角形だから、 C, D から AB への垂線の足は線分 AB の内部にある。よって

$$0 < c < 1, \quad 0 < d < 1.$$

また四面体は退化していないので $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は平行でない。

AB を含む平面 α を、その AB に垂直な単位方向ベクトル $\mathbf{e}$ で表す。 α 内で $A = (0, 0), B = (1, 0)$ と座標を取ると

$$C' = (c, u), \quad D' = (d, v), \quad u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}, \quad v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}.$$

A, B を通る円の方程式は、ある実数 λ を用いて

$$x^2 + y^2 - x + \lambda y = 0$$

と書ける。したがって C', D' もこの円上にあるための必要十分条件は

$$F(\mathbf{e}) = (c^2 + u^2 - c)v - (d^2 + v^2 - d)u = 0. \quad (*)$$

AB に垂直な平面で向きを固定し、90 度回転を J とする。

$$\mathbf{e}_0 = \frac{J\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \quad \mathbf{e}_1 = -\frac{J\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

と取る。 Δ を $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の向き付き面積とすると $\Delta \neq 0$ である。 $\mathbf{e}_0$ では $u = 0$ かつ $v = \Delta/|\mathbf{u}|$ だから

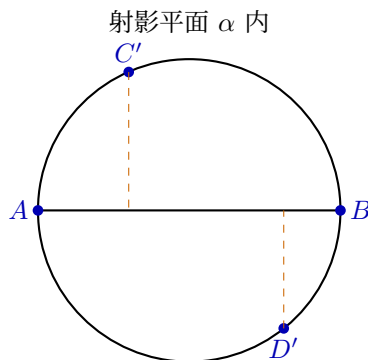
$$\operatorname{sgn} F(\mathbf{e}_0) = -\operatorname{sgn} \Delta$$

である。一方、 $\mathbf{e}_1$ では $v = 0$ かつ $u = \Delta/|\mathbf{v}|$ だから

$$\operatorname{sgn} F(\mathbf{e}_1) = \operatorname{sgn} \Delta.$$

単位円上で $\mathbf{e}_0$ から $\mathbf{e}_1$ へ連続に動かすと、 F も連続に変化する。中間値の定理により $(*)$ を満たす $\mathbf{e}$ が存在する。

この零点では $u = 0$ なら $(c^2 - c)v = 0$ となって不可能であり、同様に $v \neq 0$ でもある。ゆえに A, B, C' は一直線上にならず、共円は退化しない。さらに $0 < c, d < 1$ から C', D' は A, B と異なる。仮定 $AB \not\perp CD$ は $c \neq d$ と同値なので $C' \neq D'$ でもある。以上により、題意を満たす平面 α が存在する。



▶ 解法 2

【方針】

辺 AB を軸として射影平面を回し、射影点から AB を見る有向角の差を考える。面 ABC に垂直な平面と面 ABD に垂直な平面では差の符号が逆になる。鋭角条件で端点の射影位置を制御し、連続性と円周角の定理の逆で存在を得る。

【解答】

AB を含む平面を連続的に回転させる。まず平面 α_0 を面 ABC と垂直に取る。このとき C' は C から AB へ下ろした垂線の足であり、面 ABC が鋭角なので AB の内部にある。したがって A, C', B はこの順に一直線上に並ぶ。

同様に、面 ABD と垂直な平面 α_1 では D' が AB の内部にある。射影点が AB 上にない途中の平面で、 AB に対する 2 つの有向円周角の差

$$\Phi(\alpha) = \angle AC'B - \angle AD'B$$

を連続に選ぶ。 α_0 側と α_1 側では、一方だけが平角へ近づくため Φ の符号が逆になる。よって中間値の定理により途中で $\Phi(\alpha) = 0$ となる平面が存在する。円周角の定理の逆から、その平面では A, B, C', D' は同一円周上にある。

鋭角条件により C', D' の AB 方向の座標は両端 A, B の間にあるので、 A, B とは一致しない。また $C' = D'$ なら、 C, D の差は α の法線方向となって $CD \perp AB$ となり、仮定に反する。したがって 4 点はすべて相異なる。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 3。目安時間は 23 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

存在証明では連続量を具体的な共円条件 $F(e) = 0$ として置くと厳密になる。最後に 4 点の相異性と円の非退化を、鋭角条件と $AB \not\perp CD$ から個別に確認する。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

【第 4 問】

複素数平面上で原点を O , 1 の表す点を A とする. 点 $P_1(z_1), P_2(z_2), \dots$ が次の条件を満たすとき, $|z_n|$ の最大値を求めよ.

(i) $z_1 = \frac{i}{\sqrt{3}}$

(ii) $0^\circ < \arg z_{n+1} < \arg z_n < 360^\circ$

(iii) 線分 AP_n の中点を M_n とするとき, $\triangle OP_n P_{n+1} \sim \triangle OM_n A$ ($n \geq 1$) が成立する. ただし, 左右の三角形の頂点は記載された順に対応する.

▶ 解法 1

【方針】

相似の対応から, 原点を基準にした二つの辺の複素数比を等置して $z_{n+1} = 2z_n/(1+z_n)$ を得る. 逆数 $w_n = 1/z_n$ を取ると一次漸化式になり, $|z_n|$ の最大化は離散値 2^{1-n} に対する二次式の最小化へ変わる.

【解答】

M_n を表す複素数は $(1+z_n)/2$ である. 相似の対応と偏角の減少する向きから

$$\frac{z_n}{(1+z_n)/2} = \frac{z_{n+1}}{1}, \quad z_{n+1} = \frac{2z_n}{1+z_n}.$$

$w_n = 1/z_n$ とおくと

$$w_{n+1} = \frac{w_n + 1}{2}, \quad w_1 = -\sqrt{3}i.$$

したがって

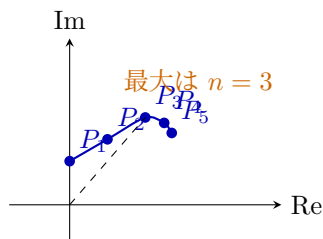
$$w_n = 1 - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2^{n-1}}, \quad z_n = \frac{1}{1 - 2^{1-n}(1 + \sqrt{3}i)}.$$

$t = 2^{1-n}$ とおけば

$$|z_n|^{-2} = (1-t)^2 + 3t^2 = 1 - 2t + 4t^2 = 4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

許される $t = 1, 1/2, 1/4, \dots$ の中に $1/4$ があり, これは $n = 3$ に対応する. よって

$$\max_n |z_n| = \frac{1}{\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



▶ 解法 2

【方針】

分数一次変換の固定点 $0, 1$ を使い、 $y_n = z_n/(1 - z_n)$ と共役変換する。この量は毎回 2 倍になるので明示式が得られる。 $|z_n|$ の逆数の 2 乗を 2 の整数べきに関する平方完成へ直し、離散的な候補から最小値を選ぶ。

【解答】

相似条件から

$$z_{n+1} = \frac{2z_n}{1 + z_n}.$$

ここで

$$y_n = \frac{z_n}{1 - z_n}$$

とおくと、直接計算により $y_{n+1} = 2y_n$ である。初期値は

$$y_1 = \frac{i/\sqrt{3}}{1 - i/\sqrt{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4}.$$

したがって $t = 2^{n-3}$ とおけば

$$y_n = t(-1 + i\sqrt{3}), \quad z_n = \frac{y_n}{1 + y_n}.$$

よって

$$|z_n|^2 = \frac{4t^2}{(1-t)^2 + 3t^2}.$$

$u = 1/(2t) = 2^{2-n}$ とおくと

$$|z_n|^{-2} = 1 - u + u^2 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

候補 $u = 2, 1, 1/2, 1/4, \dots$ の中に $1/2$ があり、 $n = 3$ に対応する。したがって

$$\max_{n \geq 1} |z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 6。目安時間は 20 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

相似の頂点对応と偏角条件から分数一次漸化式の向きを確定する。平方完成の連続最小値だけで終えず、候補が 2 の整数べきであり $n = 3$ が実現することを書く。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。

【第 5 問】

xyz 空間内に半径と高さがともに 1 である直円柱があり、下底は xy 平面上にあって中心は原点と一致している。点 P, Q はそれぞれ $A(1, 0, 1), B(0, 1, 0)$ を出発し、上底・下底の周上を同じ方向に線分 PQ の長さを変えずに 1 回転する。このとき線分 PQ が通過してできる曲面と、上底・下底で囲まれる立体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

初期状態で上下の点の偏角差は 90 度である。長さを一定にして同方向へ動くのでこの差を保ち、回転角を u として両端を表す。高さ z における線分上の点の軌跡は円になり、その半径の二乗を積分する。

【解答】

回転角を u とすると

$$P = (\cos u, \sin u, 1), \quad Q = (-\sin u, \cos u, 0)$$

と表せる。実際、上下の点の偏角差は常に $\pi/2$ であり、 $PQ^2 = 1 + 2 = 3$ は一定である。

線分 PQ 上で高さが z の点は

$$X = (1 - z)Q + zP$$

である。その水平座標は

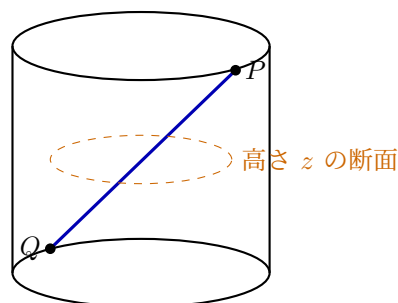
$$(x, y) = (z \cos u - (1 - z) \sin u, z \sin u + (1 - z) \cos u)$$

だから

$$x^2 + y^2 = z^2 + (1 - z)^2.$$

したがって高さ z の断面は半径 $\sqrt{z^2 + (1 - z)^2}$ の円板である。求める体積は

$$V = \pi \int_0^1 \{z^2 + (1 - z)^2\} dz = \frac{2\pi}{3}.$$



▶ 解法 2

【方針】

回転角・高さ・中心軸からの比率を 3 変数とする円柱座標で立体を直接パラメータ化する。高さ z の通過円の半径を求めた後、半径方向のヤコビアン ρ を含む三重積分で体積を計算する。

【解答】

回転角を u とすると

$$P = (\cos u, \sin u, 1), \quad Q = (-\sin u, \cos u, 0).$$

高さ z の線分上の点は $(1-z)Q + zP$ で、その中心軸からの距離を $R(z)$ とすると

$$R(z)^2 = z^2 + (1-z)^2.$$

u が 1 回転することで、この点は高さ z の円周全体を通る。よって囲まれる立体は円柱座標で

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R(z)$$

と表される。体積要素は $\rho d\rho du dz$ だから

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} \rho d\rho du dz \\ &= \pi \int_0^1 \{z^2 + (1-z)^2\} dz = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 4。目安時間は 14 分。解法 1 は本番答案として再現しやすい標準方針、解法 2 は構造を別方向から確認する方針である。

高さ z の点を線分の内分で表し、水平座標の 2 乗和が回転角によらないことを示す。通過曲面が囲む断面は円周でなく円板であるため、断面積を積分する。

採点では、必要条件だけで止めず十分性・端点・小問番号を明示する。積分・総和・極限は独立行、分数は読みやすい表示寸法に統一し、問題固有の図は論理を補助する位置に置いた。