

京都大学 2003 年度 文系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$\frac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す. すなわち小数第 k 位の数を a_k とする. このとき

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$$

を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

まず割り算で循環小数の周期を確定し、 $a_{3j+1}, a_{3j+2}, a_{3j+3}$ の形に直す. 3 桁 1 ブロックの寄与と次ブロックへの倍率を求め、最後に n を 3 で割った余りごとに残り桁を加える.

【解答】

111 で割り算をすると $\frac{23}{111} = 0.207207\cdots = 0.\overline{207}$ である. したがって桁は $a_{3j+1} = 2, \quad a_{3j+2} = 0, \quad a_{3j+3} = 7$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) と周期 3 で繰り返す.

まず $n = 3m$ のとき、3 桁を 1 ブロックとしてまとめると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3m} \frac{a_k}{3^k} &= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{2}{3^{3j+1}} + \frac{0}{3^{3j+2}} + \frac{7}{3^{3j+3}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{25}{3^{3j+3}} = \frac{25}{27} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{27}\right)^m}{1 - \frac{1}{27}} \\ &= \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right). \end{aligned}$$

ここで、1 ブロックの寄与は $\frac{2}{3} + \frac{7}{27} = \frac{25}{27}$ であり、次のブロックに移るたびに全体が $\frac{1}{27}$ 倍になる.

残りの桁がある場合を加える. $n = 3m + 1$ のときは、最初の $3m$ 桁に次の桁 2 だけが加わるから

$$\sum_{k=1}^{3m+1} \frac{a_k}{3^k} = \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right) + \frac{2}{3^{3m+1}}.$$

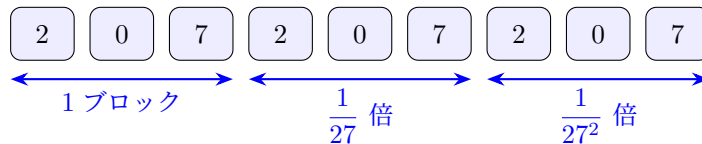
また $n = 3m + 2$ のときは、その次の桁が 0 なので値は同じで

$$\sum_{k=1}^{3m+2} \frac{a_k}{3^k} = \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right) + \frac{2}{3^{3m+1}}.$$

よって答えは

$$\begin{cases} \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right), & n = 3m, \\ \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right) + \frac{2}{3^{3m+1}}, & n = 3m + 1, \\ \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right) + \frac{2}{3^{3m+1}}, & n = 3m + 2. \end{cases}$$

ただし第 1 式では $m \geq 1$ 、第 2・第 3 式では $m \geq 0$ とする。



▶ 解法 2 (3 桁ごとの漸化式)

【方針】

部分和を T_n と置く。循環節 207 を 1 組追加したときの増分を直接書けば、等比数列の公式を一度だけ使って 3 の剰余ごとの式を得られる。

【解答】

部分和を

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$$

とおく。小数表示は

$$\frac{23}{111} = 0.\overline{207}$$

だから、各 $j \geq 0$ について

$$(a_{3j+1}, a_{3j+2}, a_{3j+3}) = (2, 0, 7)$$

である。したがって

$$T_{3m} - T_{3m-3} = \frac{2}{3^{3m-2}} + \frac{7}{3^{3m}} = \frac{25}{3^{3m}} \quad (m \geq 1).$$

初期値 $T_0 = 0$ から

$$\begin{aligned} T_{3m} &= 25 \sum_{j=1}^m \frac{1}{3^{3j}} \\ &= \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right). \end{aligned}$$

さらに

$$T_{3m+1} = T_{3m} + \frac{2}{3^{3m+1}}, \quad T_{3m+2} = T_{3m+1}$$

である。よって

$$T_n = \begin{cases} \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right) & (n = 3m), \\ \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{27^m} \right) + \frac{2}{3^{3m+1}} & (n = 3m+1, 3m+2). \end{cases}$$

第 1 式では $m \geq 1$ 、第 2 式では $m \geq 0$ である。

【総評】 難度 4、計算量 4。目安時間は 8~10 分。採点ポイントは、 $\frac{23}{111} = 0.\overline{207}$ と周期を正しく出すこと、3 桁 1 ブロックの寄与が $\frac{25}{27}$ で次が $\frac{1}{27}$ 倍になること、 n の剰余ごとに最後の桁を処理することです。

誤りやすいのは、 $n = 3m+2$ で 2 桁目の 0 を余分な項として扱ったり、 $n = 3m$ と $n = 3m+1$ の m の範囲を混同したりする点です。答えは「循環節の確認、ブロック和、余りの処理」の順に並べると読みやすく、計算の根拠も追いやすくなります。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の流れと条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

xy 平面上で、放物線 $C: y = x^2 + x$ と、直線 $l: y = kx + k - 1$ を考える。このとき次の間に答えよ。

- (1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。
- (2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし、線分 PQ の長さを L 、線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。 k が (1) で定まる範囲を動くとき、 $\frac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

交点の個数は、直線と放物線を連立して得られる 2 次方程式の判別式で調べる。面積は 2 根の差で表し、線分の長さも同じ 2 根の差で表すと、比 $\frac{S}{L^3}$ では根の差が消える。最後に k の許される範囲と端点を確認する。

【解答】

(1) 直線と放物線の交点の x 座標は $x^2 + x = kx + k - 1$ すなわち $x^2 + (1 - k)x - (k - 1) = 0$ の解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (1 - k)^2 + 4(k - 1) \\ &= k^2 + 2k - 3 \\ &= (k - 1)(k + 3). \end{aligned}$$

相異なる 2 点で交わるための条件は $D > 0$ であるから、 $k < -3$ または $k > 1$ である。

(2) 次に、この条件のもとで 2 つの交点の x 座標を $\alpha < \beta$ とおく。区間 $[\alpha, \beta]$ では直線が放物線の上にあるので、囲まれる面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{kx + k - 1 - (x^2 + x)\} dx$$

である。ここで 2 次方程式の根が α, β であることから $kx + k - 1 - (x^2 + x) = -(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)(\beta - x)$ 。よって

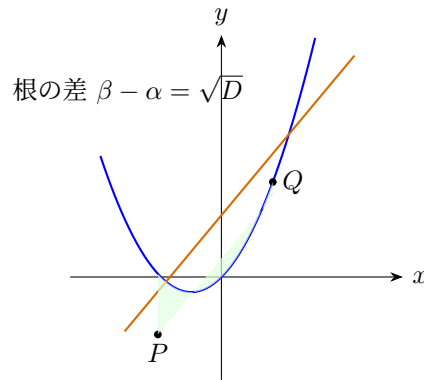
$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) dx \\ &= \int_0^{\beta - \alpha} t\{(\beta - \alpha) - t\} dt \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}. \end{aligned}$$

一方、交点を結ぶ線分は直線 $y = kx + k - 1$ 上にあるので、 x 座標の差を $\beta - \alpha$ とすると、 y 座標の差は $k(\beta - \alpha)$ である。したがって $L = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + k^2}$ 。従って

$$\begin{aligned} \frac{S}{L^3} &= \frac{\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}}{(\beta - \alpha)^3(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{6(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

ここで $k < -3$ または $k > 1$ である。関数 $\frac{1}{6(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$ は $|k|$ が小さいほど大きいので、許される範囲では $k \rightarrow 1 + 0$ のとき

き最大値に近づく。ただし $k = 1$ は交点が 2 点でないため含まれない。よって値域は $0 < \frac{S}{L^3} < \frac{1}{12\sqrt{2}}$ 。下限 0 は $|k| \rightarrow \infty$ で近づくだけで、これも実際には取らない。



▶ 解法 2 (判別式だけで根の差を表す)

【方針】

交点方程式の判別式 D は 2 根の差の 2 乗でもある。面積と弦長をともに $\sqrt{D}$ で表し、比を直接整理する。

【解答】

(1) 交点の x 座標は

$$x^2 + (1 - k)x - (k - 1) = 0$$

の 2 根である。判別式は

$$D = (1 - k)^2 + 4(k - 1) = (k - 1)(k + 3)$$

だから、相異なる 2 交点をもつ条件は

$$k < -3 \quad \text{または} \quad k > 1$$

である。

(2) 2 根を $\alpha < \beta$ とすると、2 次方程式は最高次係数が 1 なので

$$\beta - \alpha = \sqrt{D}.$$

直線と放物線の差は

$$(x - \alpha)(\beta - x)$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = \frac{D^{\frac{3}{2}}}{6}. \end{aligned}$$

また直線の傾きは k なので

$$L = \sqrt{1 + k^2} (\beta - \alpha) = \sqrt{D(1 + k^2)}.$$

したがって

$$\frac{S}{L^3} = \frac{1}{6(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

許される k のうち絶対値が最も小さくなる境界は $k = 1$ であるが、 $k = 1$ 自体は含まれない。また $|k| \rightarrow \infty$ で値は 0 へ近づく。よって値域は

$$0 < \frac{S}{L^3} < \frac{1}{12\sqrt{2}}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 14~18 分。採点ポイントは、判別式で 2 交点の条件を出すこと、囲まれる面積を $\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$ と表すこと、線分長 $L = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + k^2}$ との比で根の差が消えることです。

誤りやすいのは、 $k = 1$ を値域の最大値として含めてしまうことです。 $k = 1$ では接するだけで相異なる 2 点ではないため、 $\frac{1}{12\sqrt{2}}$ は上限であって最大値ではありません。答えは、交点条件、面積・長さの一般式、値域の端点確認を分けて書くと、端点の抜けを防げます。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

四面体 $OABC$ は次の 2 つの条件

- (i) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$
- (ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている。このとき、この四面体は正四面体であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

頂点 O を原点とみなし、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ をベクトルで表す。対辺の直交条件から 3 つの内積が等しいことを示し、側面の面積条件で 3 本の長さをそろえる。最後に底面 ABC の面積条件を使って内積を決め、全辺同長を導く。

【解答】

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ とおく。条件 $AB \perp OC$, より $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0$ であるから、 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ である。同様に $BC \perp OA$, $CA \perp OB$ より

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$$

が成り立つ。したがって 3 つの内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$$

はすべて等しい。この共通値を p とおく。

また $|\mathbf{a}|^2 = x$, $|\mathbf{b}|^2 = y$, $|\mathbf{c}|^2 = z$ とおく。三角形 OAB, OBC, OCA の面積の 2 乗はそれぞれ $\frac{xy - p^2}{4}$, $\frac{yz - p^2}{4}$, $\frac{zx - p^2}{4}$ である。4 つの面の面積がすべて等しいので、特にこの 3 つは等しく、 $xy = yz = zx$ を得る。 $x, y, z > 0$ であるから $x = y = z = s$ とおける。

このとき三角形 OAB の面積の 2 乗は $\frac{s^2 - p^2}{4}$ である。一方、三角形 ABC について

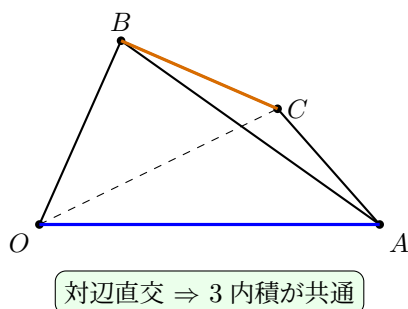
$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$$

とすると $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 2(s - p)$, $|\mathbf{c} - \mathbf{a}|^2 = 2(s - p)$, また $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = p - p - p + s = s - p$ である。よって三角形 ABC の面積の 2 乗は

$$\frac{1}{4} \{ 2(s - p) \cdot 2(s - p) - (s - p)^2 \} = \frac{3(s - p)^2}{4}.$$

面積が等しいから $s^2 - p^2 = 3(s - p)^2$. 四面体はつぶれていないので $s - p > 0$ であり、両辺を $s - p$ で割ると $s + p = 3(s - p)$ となる。したがって $p = \frac{s}{2}$ である。

最後に各辺の長さを比べると $OA^2 = OB^2 = OC^2 = s$ であり、また $AB^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 2(s - p) = s$ である。同様に $BC^2 = CA^2 = s$ である。したがって 6 本の辺はすべて等しく、四面体 $OABC$ は正四面体である。



▶ 解法 2 (辺長と余弦で整理する)

【方針】

3 本の頂点辺の長さと、その間の角の余弦を用いる。対辺との直交条件で 3 つの内積を共通化し、面積条件を順に使って全辺をそろえる。

【解答】

辺の長さを

$$OA = u, \quad OB = v, \quad OC = w$$

とし、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = q$$

とおく。この 3 つが等しいことは、例えば

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$$

から

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$$

を得ることと、残り 2 条件を巡回的に使うことから従う。

三角形 OAB, OBC, OCA の面積の 4 倍の 2 乗は、それぞれ

$$u^2v^2 - q^2, \quad v^2w^2 - q^2, \quad w^2u^2 - q^2$$

である。これらが等しく、 $u, v, w > 0$ だから

$$u = v = w = \ell$$

である。

このとき

$$AB^2 = BC^2 = CA^2 = 2(\ell^2 - q)$$

なので、三角形 ABC は正三角形である。その面積の 2 乗は

$$\frac{3}{4}(\ell^2 - q)^2$$

であり、三角形 OAB の面積の 2 乗は

$$\frac{1}{4}(\ell^4 - q^2)$$

である。両者が等しいため

$$\ell^4 - q^2 = 3(\ell^2 - q)^2.$$

$\ell^2 - q > 0$ で割ると

$$\ell^2 + q = 3(\ell^2 - q), \quad q = \frac{\ell^2}{2}.$$

したがって

$$AB^2 = BC^2 = CA^2 = \ell^2 = OA^2 = OB^2 = OC^2.$$

6 辺がすべて等しいので、四面体 $OABC$ は正四面体である。

【総評】 難度 8、計算量 6。目安時間は 18~25 分。採点ポイントは、対辺の直交条件から 3 つの内積を同じ値 p にそろえること、3 つの側面の面積等式から $|a| = |b| = |c|$ を導くこと、底面 ABC の面積まで使って $p = \frac{s}{2}$ を得ることです。

誤りやすいのは、直交条件だけで正四面体と結論してしまうこと、または面積公式の 2 乗で係数 $\frac{1}{4}$ を落とすことです。答案は、内積の整理、側面の面積比較、底面の面積比較、辺長の確認という 4 段階に分けると、条件を使い切ったことが明確になります。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

p は 3 以上の素数であり, x, y は $0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p$ をみたす整数であるとする. このとき x^2 を $2p$ で割った余りと, y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ, $x = y$ であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

合同条件から $2p \mid (x-y)(x+y)$ を得る. ただし法が $2p$ なので, 偶奇の情報と p での割り切れ方を分けて扱う. $0 \leq x, y \leq p$ という範囲を使い, $x-y$ と $x+y$ の可能性を端点まで絞る.

【解答】

x^2 と y^2 を $2p$ で割った余りが等しいので $x^2 \equiv y^2 \pmod{2p}$ である. したがって $2p \mid (x^2 - y^2) = (x-y)(x+y)$ が成り立つ.

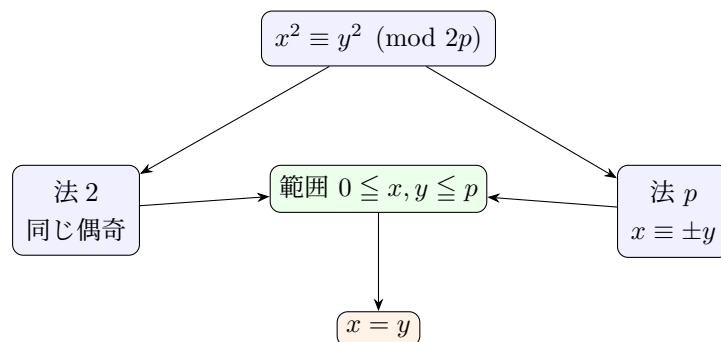
まず法 2 で考えると $x^2 \equiv y^2 \pmod{2}$ である. 整数は 2 で割った余りと 2 乗の余りが一致するので, x と y は同じ偶奇である.

次に法 p で考える. p は素数だから $p \mid (x-y)(x+y)$ より $p \mid x-y$ または $p \mid x+y$ である.

まず $p \mid x-y$ の場合を考える. $0 \leq x, y \leq p$ より $-p \leq x-y \leq p$ であるから, $x-y$ は $-p, 0, p$ のいずれかである. もし $x-y = \pm p$ なら, (x, y) は $(p, 0)$ または $(0, p)$ であり, p が奇数であるため x, y の偶奇が異なる. これは先に得た同じ偶奇に反する. よって $x-y = 0$ であり, $x = y$ である.

次に $p \mid x+y$ の場合を考える. $0 \leq x+y \leq 2p$ であるから $x+y = 0, p, 2p$ のいずれかである. ところが x, y は同じ偶奇なので $x+y$ は偶数である. 一方 p は奇数だから, $x+y = p$ は起こらない. したがって $x+y = 0$ または $x+y = 2p$ である. 前者では $x = y = 0$, 後者では $0 \leq x, y \leq p$ から $x = y = p$ となる.

いずれの場合も $x = y$ が従う.



▶ 解法 2 (法 2 と法 p を分離する)

【方針】

法 $2p$ の合同を, 法 2 による偶奇と法 p による符号の 2 情報へ分ける. 中国剰余定理を名称として使わず, 範囲条件で候補を尽くす.

【解答】

仮定より

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{2p}.$$

法 2 で見ると $x \equiv y \pmod{2}$ であり, x, y は同じ偶奇である.

一方, 法 p では

$$(x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod{p}.$$

p は素数だから

$$x \equiv y \pmod{p} \quad \text{または} \quad x \equiv -y \pmod{p}.$$

前者では $-p \leq x-y \leq p$ より

$$x-y \in \{-p, 0, p\}.$$

$\pm p$ なら端点の組 $(p, 0)$ または $(0, p)$ となり, 偶奇が異なるので不可能である. ゆえに $x = y$ である.

後者では

$$x + y \in \{0, p, 2p\}.$$

$x + y$ は偶数で p は奇数だから $x + y = p$ は不可能である。 $x + y = 0$ なら $x = y = 0$ 、 $x + y = 2p$ なら $x = y = p$ である。どの場合にも

$$x = y$$

が得られる。

【総評】 難度 6、計算量 4。目安時間は 12～16 分。採点ポイントは、 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ に分解すること、法 2 から同じ偶奇を得ること、法 p では $p \mid x - y$ または $p \mid x + y$ に分けることです。

誤りやすいのは、 $2p \mid (x - y)(x + y)$ からただちに $2p \mid x - y$ などと決めつけることです。 $0 \leq x, y \leq p$ により差は $-p, 0, p$ 、和は $0, p, 2p$ に限られるので、端点 $(0, 0), (p, p)$ も含めて処理します。答案では偶奇と p の議論を分けると、論理の飛躍がなくなります。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

4 チームがリーグ戦を行う。すなわち、各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし、勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で、各回の勝敗は独立に決まるものとする。勝ち数の多い順に順位をつけ、勝ち数が同じであればそれらは同順位とする。1 位のチーム数の期待値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

全 6 試合の勝敗は同確率なので、まず勝敗表を勝数の型で分類する。3 勝チームがいる場合といない場合に分け、 $(2, 2, 2, 0)$ 型だけを別に数える。検算として、1 チームが首位になる確率から期待値を求める別解も使える。

【解答】

4 チームを区別して考える。総試合数は ${}_4C_2 = 6$ であり、各試合の勝敗は独立に 2 通りだから、全体的場合の数は $2^6 = 64$ である。

まず、3 勝 0 敗のチームがいる場合を数える。3 勝するチームを 1 つ選ぶ方法が 4 通りあり、そのチームが関わる 3 試合の勝敗はすべて決まる。残り 3 チーム同士の試合は 3 試合あり、これは自由に決められるので $2^3 = 8$ 通りである。したがってこの場合は $4 \cdot 8 = 32$ 通りであり、首位は 3 勝した 1 チームだけである。

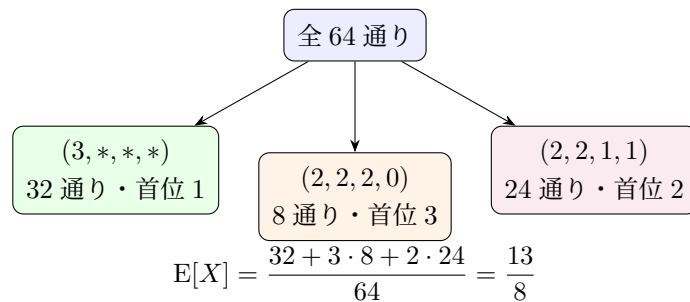
次に、3 勝チームがいない場合を考える。このとき最大勝数は 2 である。

勝数の型が $(2, 2, 2, 0)$ となる場合は、0 勝のチームを選ぶ方法が 4 通りある。そのチームは他の 3 チーム全員に負け、残り 3 チーム同士は全員が 2 勝になるために、3 チームの間で勝敗が循環していなければならない。循環の向きは 2 通りなので、この型は $4 \cdot 2 = 8$ 通りであり、首位は 2 勝の 3 チームである。

3 勝チームがいない残りの場合の数は $64 - 32 - 8 = 24$ 通りである。このとき勝数の合計は試合数と同じ 6 で、最大勝数が 2、かつ $(2, 2, 2, 0)$ ではないので、勝数の型は $(2, 2, 1, 1)$ である。したがって首位は 2 勝の 2 チームである。

よって、首位チーム数の期待値は

$$\begin{aligned} \frac{32 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 24 \cdot 2}{64} &= \frac{32 + 24 + 48}{64} \\ &= \frac{104}{64} \\ &= \frac{13}{8}. \end{aligned}$$



▶ 解法 2 (指示変数と期待値の線形性)

【方針】

各チームが「1 位に含まれる」ことを表す指示変数を置く。1 チームを固定して首位になる勝敗表を数え、対称性で 4 倍する。

【解答】

チーム i が 1 位に含まれるとき 1、そうでないとき 0 となる指示変数を I_i とする。1 位のチーム数を X とすれば

$$X = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

だから、対称性と期待値の線形性より

$$E[X] = 4\Pr(I_1 = 1).$$

チーム 1 を固定する。3 勝の場合、残る 3 試合は自由なので勝敗表は

$$2^3 = 8$$

通りである。

2 勝 1 敗の場合、チーム 1 に勝つ相手を 3 通りに選ぶ。その相手が残る 2 チームにも勝つと 3 勝してしまい、チーム 1 は首位でなくなる。相手以外の 3 試合は 8 通りだが、この除外は残り 2 チーム間の勝敗だけが自由な 2 通りである。したがって

$$3(8 - 2) = 18$$

通りである。

1 勝以下では、全 6 試合の勝数の合計が 6 であるため、他に 2 勝以上のチームが必ずあり、首位にはなれない。よって

$$\Pr(I_1 = 1) = \frac{8 + 18}{64} = \frac{13}{32}.$$

したがって

$$E[X] = 4 \cdot \frac{13}{32} = \frac{13}{8}.$$

【総評】 難度 6、計算量 4。目安時間は 12～15 分。採点ポイントは、全 64 通りを同確率として扱うこと、3 勝チームがいる 32 通りを先に分けること、3 勝チームがいない場合のうち (2, 2, 2, 0) 型を 8 通りと正しく数えることです。

誤りやすいのは、残りをすべて首位 2 チームとする前に (2, 2, 2, 0) 型を除き忘れることです。分類解法では型ごとの首位人数を掛けて平均し、別解では 1 チームが首位に含まれる場合を数えて期待値の線形性を使います。どちらの答案でも「同順位なら全員が 1 位」という定義を数え上げに反映させることが重要です。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。