

京都大学 2003 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

正三角形 ABC の辺 AB 上に点 P_1, P_2 が、辺 BC 上に点 Q_1, Q_2 が、辺 CA 上に点 R_1, R_2 があり、どの点も頂点には一致していないとする。このとき三角形 $P_1Q_1R_1$ の重心と三角形 $P_2Q_2R_2$ の重心が一致すれば、 $P_1P_2 = Q_1Q_2 = R_1R_2$ が成り立つことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

各辺上の点を、その辺の始点からの比で表す。二つの重心が一致する条件を辺方向ベクトルで整理すると、3 辺での比の変化量がすべて等しいことが分かる。正三角形では 3 辺の長さが等しいので結論が従う。

【解答】

$0 < p_i, q_i, r_i < 1$ を用いて

$$P_i = A + p_i(B - A), \quad Q_i = B + q_i(C - B), \quad R_i = C + r_i(A - C)$$

と表す。二つの三角形の重心が一致するから

$$(p_1 - p_2)(B - A) + (q_1 - q_2)(C - B) + (r_1 - r_2)(A - C) = \vec{0}.$$

$u = p_1 - p_2, v = q_1 - q_2, w = r_1 - r_2$ とおき、 $C - B = (C - A) - (B - A)$, $A - C = -(C - A)$ を代入すると

$$(u - v)(B - A) + (v - w)(C - A) = \vec{0}.$$

三角形は退化していないので $B - A, C - A$ は一次独立である。したがって

$$u = v = w.$$

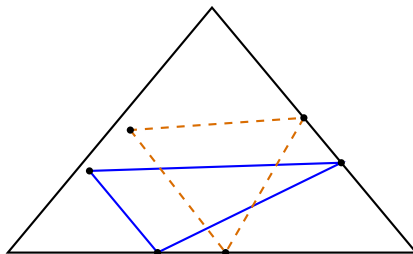
正三角形の一辺を L とすれば

$$P_1P_2 = |p_1 - p_2|L, \quad Q_1Q_2 = |q_1 - q_2|L, \quad R_1R_2 = |r_1 - r_2|L.$$

変化量が等しいので

$$P_1P_2 = Q_1Q_2 = R_1R_2$$

が成り立つ。



重心一致 $\Rightarrow$ 3 辺上の変化量が同じ

▶ 解法 2 (座標成分で比較する)

【方針】

正三角形を座標平面に置き、各辺上の点を 1 変数で表す。重心の x, y 成分を比較して、3 辺上の変化量が等しいことを導く。

【解答】

一辺を 1 として

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とおく。ある $0 < p_i, q_i, r_i < 1$ により

$$P_i = (p_i, 0),$$

$$Q_i = \left(1 - \frac{q_i}{2}, \frac{\sqrt{3}q_i}{2}\right),$$

$$R_i = \left(\frac{1 - r_i}{2}, \frac{\sqrt{3}(1 - r_i)}{2}\right)$$

と書ける。

2 つの三角形の重心が一致するので、 y 成分の差から

$$(q_1 - q_2) - (r_1 - r_2) = 0.$$

x 成分の差から

$$(p_1 - p_2) - \frac{1}{2}(q_1 - q_2) - \frac{1}{2}(r_1 - r_2) = 0.$$

よって

$$p_1 - p_2 = q_1 - q_2 = r_1 - r_2.$$

正三角形の 3 辺は同じ長さなので、絶対値を取れば

$$P_1P_2 = Q_1Q_2 = R_1R_2$$

である。

【総評】 難度 4、計算量 3。想定時間は 12 分程度。重心の座標を直接展開するより、同じ辺上の 2 点の差だけを取ると式が短い。最後は符号付きの比が等しいことから、長さでは絶対値を取る点を忘れない。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

一辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 AC 上に点 D をとり、線分 BD に沿ってこの三角形を折り曲げ、4 点 A, B, C, D を頂点とする四面体を作り、その体積を最大にすることを考える。体積が最大になるときの D の位置と、そのときの四面体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$AD = x$ とする。辺 BD を共通底辺とする二つの面 ABD, CBD の高さを使うと、四面体の体積は二面角の正弦を含む形になる。まず二面角を直角にして最大化し、残る x の式は $u = x(1-x)$ で単調性を調べる。

【解答】

$AD = x, DC = 1-x$ とする。平面内で A, C から直線 BD までの距離をそれぞれ h_A, h_C 、折った後の二面角を ϕ とする。四面体の体積は

$$V = \frac{1}{6} BD h_A h_C \sin \phi.$$

固定した D に対しては $\sin \phi \leq 1$ だから、二面角が直角のとき最大となる。

元の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。面積比から

$$\frac{1}{2} BD h_A = \frac{\sqrt{3}}{4} x, \quad \frac{1}{2} BD h_C = \frac{\sqrt{3}}{4} (1-x).$$

また座標または余弦定理により

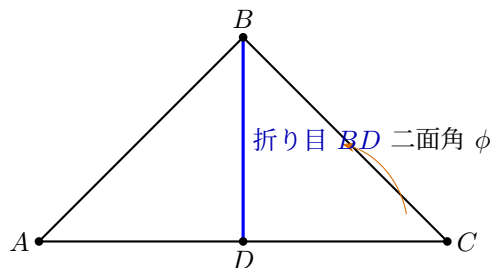
$$BD^2 = x^2 - x + 1 = 1 - x(1-x).$$

したがって D を固定したときの最大体積は

$$V(x) = \frac{x(1-x)}{8\sqrt{1-x(1-x)}}.$$

$u = x(1-x)$ とおくと $0 < u \leq \frac{1}{4}$ であり、 $\frac{u}{\sqrt{1-u}}$ はこの範囲で単調増加する。よって u が最大の $x = \frac{1}{2}$ 、すなわち D が AC の中点のとき体積も最大である。その値は

$$V_{\max} = \frac{\frac{1}{4}}{8\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{16\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{48}.$$



▶ 解法 2 (積 $AD \cdot DC$ だけで評価する)

【方針】

固定した D では二面角を直角にするのが最善である。その最大体積を $u = AD \cdot DC$ だけで表し、 $u \leq \frac{1}{4}$ を使う。

【解答】

$AD = x, DC = 1 - x$ とし

$$u = x(1 - x)$$

とおく。元の正三角形で

$$BD^2 = x^2 - x + 1 = 1 - u.$$

辺 BD に対する三角形 ABD, CBD の高さを h_A, h_C 、折った二面角を ϕ とすると

$$V = \frac{1}{6} BD h_A h_C \sin \phi.$$

固定した D では $\sin \phi \leq 1$ だから、二面角が直角のとき最大になる。

面積比から

$$h_A = \frac{\sqrt{3}x}{2BD}, \quad h_C = \frac{\sqrt{3}(1-x)}{2BD}.$$

したがって

$$V \leq \frac{u}{8\sqrt{1-u}}.$$

また

$$u = x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

であり、正の範囲では $\frac{u}{\sqrt{1-u}}$ は u とともに増加する。よって等号は

$$x = \frac{1}{2}$$

すなわち D が AC の中点で、かつ二面角が直角のときに成り立つ。そのとき

$$V_{\max} = \frac{\frac{1}{4}}{8\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{48}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 25 分程度。折り曲げ角と点 D の位置という二つの自由度を分離するのが核心である。固定した D では二面角 90 度、次に D の位置は $x(1-x)$ の最大化、と順に処理すると見通しがよい。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

a, b を実数とする. 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ は 3 つの複素数からなる解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ をもち, 相異なる i, j に対し $|\alpha_i - \alpha_j| = \sqrt{3}$ をみたしている. このような a, b の組をすべて求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

3 根は複素平面上で一辺 $\sqrt{3}$ の正三角形を作る. 重心を w 、重心から頂点への複素数を $u, u\omega, u\omega^2$ と表すと $|u| = 1$ であり、根をもつ多項式が一度に展開できる. 実係数条件と定数項を使って w を決める.

【解答】

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ とする. 3 根は一辺 $\sqrt{3}$ の正三角形の頂点だから、ある複素数 w, u を用いて

$$\alpha_1 = w + u, \quad \alpha_2 = w + u\omega, \quad \alpha_3 = w + u\omega^2, \quad |u| = 1$$

と表せる. これらを根にもつ多項式は

$$(x - w)^3 - u^3 = x^3 - 3wx^2 + 3w^2x - (w^3 + u^3).$$

係数比較により

$$a = -3w, \quad b = 3w^2, \quad w^3 + u^3 = -1.$$

a は実数だから w は実数である. また $|u^3| = 1$ で、 $u^3 = -1 - w^3$ は実数だから

$$-1 - w^3 = 1 \quad \text{または} \quad -1 - w^3 = -1.$$

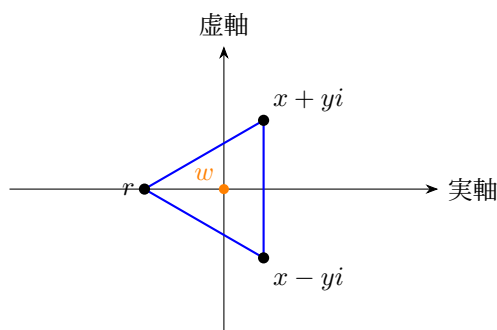
したがって

$$w = -\sqrt[3]{2} \quad \text{または} \quad w = 0.$$

前者では $u^3 = 1$ 、後者では $u^3 = -1$ と取れて、いずれも条件を満たす. よって

$$(a, b) = (3\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}), \quad (0, 0)$$

がすべてである.



辺 $\sqrt{3}$ 、外接円半径 1

▶ 解法 2 (実根と共役根を座標化する)

【方針】

実係数 3 次式なので根の集合は共役で不変である。実根 1 個と共役な 2 根を置き、正三角形の辺長条件から中心を決める。

【解答】

3 根は正三角形を作り、係数が実数なので、1 根を実数 r 、残りを

$$x \pm yi$$

と書ける。共役な 2 根の距離から

$$2|y| = \sqrt{3}, \quad y^2 = \frac{3}{4}.$$

実根との距離も $\sqrt{3}$ だから

$$(r-x)^2 + y^2 = 3, \quad r-x = \pm \frac{3}{2}.$$

三角形の重心を w とすると

$$w = \frac{r+2x}{3}.$$

$r-x = \frac{3}{2}$ の場合は

$$r = w+1, \quad x = w - \frac{1}{2}.$$

根の積が -1 なので

$$(w+1) \left\{ \left(w - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\} = w^3 + 1 = -1,$$

すなわち $w^3 = -2$ である。

$r-x = -\frac{3}{2}$ の場合は

$$r = w-1, \quad x = w + \frac{1}{2}$$

であり、同様に

$$(w-1) \left\{ \left(w + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\} = w^3 - 1 = -1,$$

よって $w=0$ である。

根の和と 2 根積の和から

$$a = -3w, \quad b = 3w^2.$$

したがって

$$(a, b) = (0, 0), \quad (a, b) = (3\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4})$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 5。想定時間は 25 分程度。三つの根の距離がすべて等しいことを正三角形と読み、外接円半径が 1 になる点が入点である。重心をずらした $(x-w)^3 - u^3$ の形にすると、実係数条件と積の条件を短く処理できる。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

$\{a_n\}$ を正の数からなる数列とし、 p を正の実数とする。このとき $a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$ をみたす番号 n が存在することを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

結論を否定し、すべての n で逆向きの不等式が成り立つと仮定する。その不等式を繰り返して a_{n+1} の上界を明示すると、十分大きな n で上界が負になり、数列の正値性に反する。

【解答】

そのような番号が存在しないと仮定する。このときすべての $n \geq 1$ について

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n - p$$

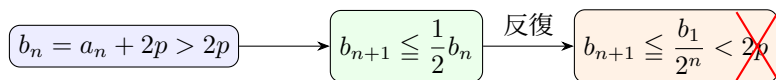
である。これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq \frac{a_1}{2^n} - p \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{a_1 + 2p}{2^n} - 2p. \end{aligned}$$

右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき $-2p < 0$ に近づくので、十分大きな n では負になる。すると $a_{n+1} < 0$ となり、すべての項が正であるという仮定に反する。したがって

$$a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$$

を満たす番号 n が少なくとも一つ存在する。



▶ 解法 2 (定数を加えて収縮させる)

【方針】

否定仮定の不等式に合うよう $b_n = a_n + 2p$ と置く。すると b_n が毎回半分以下になる一方、常に $2p$ より大きいという矛盾が出る。

【解答】

結論が偽であると仮定する。すべての $n \geq 1$ について

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n - p$$

である。ここで

$$b_n = a_n + 2p$$

とおくと

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + 2p \\ &\leq \frac{1}{2}a_n + p \\ &= \frac{1}{2}b_n. \end{aligned}$$

したがって

$$b_{n+1} \leq \frac{b_1}{2^n}.$$

一方、 $a_{n+1} > 0, p > 0$ だから

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 2p > 2p.$$

十分大きな n では

$$\frac{b_1}{2^n} < 2p$$

となるので矛盾する。ゆえに少なくとも 1 つの番号 n に対して

$$a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$$

が成り立つ。

【総評】 難度 4、計算量 3。想定時間は 12 分程度。存在命題は否定すると「すべての n で逆の不等式」となり、反復評価が使える。等比数列の和を正確に処理し、上界が負になることと正項数列の仮定を明確に衝突させる。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n} \right)^{100}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

奇数番目と偶数番目を一組にすると、 x^{100} の隣接する二点での差になる。平均値の定理で各差を幅 $\frac{1}{2n}$ と導関数の値の積に直せば、 $100x^{99}$ のリーマン和になる。

【解答】

奇数項とその直後の偶数項を組にすると

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left\{ \left(\frac{j}{n} \right)^{100} - \left(\frac{2j-1}{2n} \right)^{100} \right\}.$$

関数 $f(x) = x^{100}$ に平均値の定理を用いると、各 j について

$$\frac{2j-1}{2n} < \xi_j < \frac{j}{n}$$

を満たす ξ_j が存在して

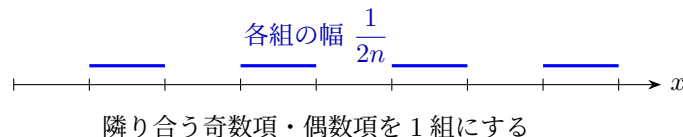
$$f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{2j-1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} f'(\xi_j) = \frac{1}{2n} 100 \xi_j^{99}.$$

したがって

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 100 \xi_j^{99}.$$

これは区間 $[0, 1]$ における $100x^{99}$ のリーマン和の半分だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \int_0^1 100x^{99} dx = \frac{1}{2}.$$



▶ 解法 2 (二項展開で主項を取り出す)

【方針】

偶数項と直前の奇数項を組にし、その差を二項定理で展開する。最高次数の項だけが極限に残り、残りを次数で評価する。

【解答】

交代和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{(2n)^{100}} \sum_{j=1}^n \{(2j)^{100} - (2j-1)^{100}\}.$$

二項定理により

$$(2j)^{100} - (2j-1)^{100} = 100(2j)^{99} + R_j,$$

ここである定数 $C > 0$ により

$$|R_j| \leq Cj^{98}$$

と評価できる。したがって

$$S_n = \frac{100 \cdot 2^{99}}{2^{100} n^{100}} \sum_{j=1}^n j^{99} + \frac{1}{(2n)^{100}} \sum_{j=1}^n R_j.$$

後半は

$$\left| \frac{1}{(2n)^{100}} \sum_{j=1}^n R_j \right| \leq \frac{C}{(2n)^{100}} \sum_{j=1}^n j^{98} \rightarrow 0.$$

また

$$\frac{1}{n^{100}} \sum_{j=1}^n j^{99} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^{99} \rightarrow \int_0^1 x^{99} dx = \frac{1}{100}.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 50 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{2}.$$

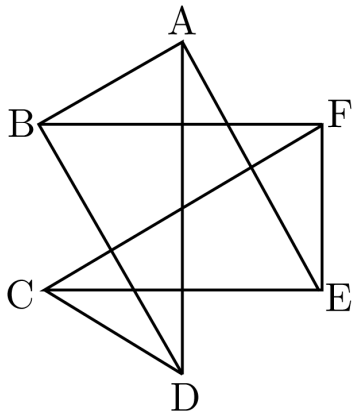
【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 15 分程度。交代和をそのまま評価せず、偶数項から直前の奇数項を引く形へ組み替える。区間幅は $\frac{1}{2n}$ なので、通常の幅 $\frac{1}{n}$ のリーマン和の半分になることが最終係数を決める。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 6 問】

7 つの文字を並べた列 $a_1 a_2 \cdots a_7$ で、次の 3 つの条件をみたすものの総数を求めよ.

- (i) $a_1, a_2, \dots, a_7$ は A, B, C, D, E, F のいずれかである
- (ii) $i = 1, 2, \dots, 6$ に対し, a_i と a_{i+1} は相異なる
- (iii) $i = 1, 2, \dots, 6$ に対し, a_i と a_{i+1} は右図において線分で結ばれている



▶ 解法 1

【方針】

図は三角形 ABD と三角形 CEF の対応する頂点を結んだ三角柱の辺グラフであり、各頂点から出る辺は 3 本である。最初の文字を選んだ後は、直前の頂点に隣接する 3 頂点から次を選ぶ。

【解答】

図の各頂点に接続する頂点を調べると

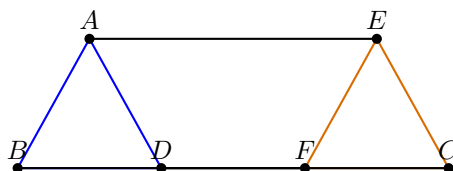
A	B, D, E
B	A, D, F
C	D, E, F
D	A, B, C
E	A, C, F
F	B, C, E

であり、どの頂点の次数も 3 である。また辺は異なる二頂点を結ぶので、辺を選ぶ限り条件 (ii) も自動的に満たされる。

最初の文字 a_1 は 6 通りに選べる。 a_i が決まったとき、 a_{i+1} はそれに辺で結ばれた 3 文字から選べるので常に 3 通りである。遷移は 6 回あるから、総数は

$$6 \cdot 3^6 = 4374$$

である。



どの頂点からも次の候補は 3 個

▶ 解法 2 (末尾文字ごとの漸化式)

【方針】

長さ m の列を末尾の文字ごとに数える。図の各頂点に接続する文字が 3 個ずつであることから、総数の漸化式を得る。

【解答】

長さ m で条件を満たし、末尾が文字 X である列の数を $N_m(X)$ とする。図では各文字に隣接する文字がちょうど 3 個ある。

長さ $m+1$ の列を作るには、長さ m の列の末尾から、線分で結ばれた 3 文字のいずれかへ移ればよい。したがって総数

$$T_m = \sum_{X \in \{A, B, C, D, E, F\}} N_m(X)$$

は

$$T_{m+1} = 3T_m$$

を満たす。初めの文字は自由に選べるので

$$T_1 = 6.$$

よって

$$T_m = 6 \cdot 3^{m-1}.$$

求める列の長さは 7 だから

$$T_7 = 6 \cdot 3^6 = 4374$$

である。各辺は異なる 2 頂点を結ぶため、線分に沿って移る限り「隣接する文字が相異なる」という条件も自動的に満たされる。

【総評】 難度 3、計算量 2。想定時間は 8 分程度。図が複雑に交差して見えるが、交点は頂点ではなく、6 頂点はいずれも次数 3 である。各段階の選択肢数が常に 3 なので、直前以外の履歴を分類する必要はない。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。