

京都大学 2003 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が次の条件 (i), (ii) をみたすとき,

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

を求めよ.

(i) $a_1 = 1$

(ii) $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1) \ (n \geq 2)$

▶ 解法 1

【方針】

対数の差を指数に戻して $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を求める。得られた積は連続する因子が約分されるので、 a_n を簡単な分数で表す。最後は部分分数分解で和を望ましい形にし、 $n=1$ でも式が合うことを確認する。

【解答】

条件より、 $n \geq 2$ に対して $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1)$ である。左辺と右辺をそれぞれまとめると $\log \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log \frac{n-1}{n+1}$ となる。 $a_n > 0$ なので対数を外して $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$ を得る。 $a_1 = 1$ から順に掛け合わせると、 $n \geq 2$ について

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{n-1}{n+1} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

この式は $n=1$ のときも $\frac{2}{1 \cdot 2} = 1$ となり、 $a_1 = 1$ と一致する。したがってすべての $n \geq 1$ で $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ である。

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} \longrightarrow n(n+1)a_n = 2 \longrightarrow a_n = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

和では中間項がすべて相殺

▶ 解法 2 (保存量を作る)

【方針】

漸化式の両辺に $n(n+1)$ を掛けると一定になる量が見つかる。一般項を積で表さず、そのまま部分分数へ進む。

【解答】

条件 (ii) と正値性から

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} \quad (n \geq 2)$$

である。両辺を整理すると

$$n(n+1)a_n = n(n-1)a_{n-1}.$$

したがって

$$b_n = n(n+1)a_n$$

とおけば

$$b_n = b_{n-1}.$$

初項は

$$b_1 = 1 \cdot 2 \cdot a_1 = 2$$

なので、すべての $n \geq 1$ で

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

よって中間項が相殺され

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 4、計算量 3。目安時間は 7～10 分。採点ポイントは、対数の差を $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ の式に戻すこと、積を並べて

$a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ まで約分すること、和を部分分数分解で望ましい形にすることです。

誤りやすいのは、 a_n の式を $n \geq 2$ だけで出した後、 $n = 1$ の確認を忘れることです。答えは、比、一般項、和の 3 段階で書けば十分です。計算量は少ないものの、対数を外すには $a_n > 0$ が与えられていることも一言触れると、処理が丁寧になります。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 2 問】

$f(x) = x \sin x$ ($x \geq 0$) とする. 点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ における $y = f(x)$ の法線と, $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分, および y 軸とで囲まれる図形を考える. この図形を x 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

まず接線の傾きから法線を求める. 回転体の体積は, 法線を上側, 曲線を下側とする円環の断面積を積分する形にする. 上下関係を確認したうえで, $x^2 \sin^2 x$ は半角公式と部分積分で計算する.

【解答】

$f(x) = x \sin x$ とおくと $f'(x) = \sin x + x \cos x$ である. したがって $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$ であり, 接線の傾きは 1, 法線の傾きは -1 である. 点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を通るから, 法線は $y - \frac{\pi}{2} = -(x - \frac{\pi}{2})$ すなわち $y = \pi - x$ である. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $g(x) = \pi - x - x \sin x$ とおくと $g'(x) = -1 - \sin x - x \cos x < 0$ であり, $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ である. よってこの区間で法線 $y = \pi - x$ は曲線 $y = x \sin x$ の上側にある. したがって, 求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(\pi - x)^2 - (x \sin x)^2\} dx$$

である.

まず

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)^2 dx &= \left[-\frac{(\pi - x)^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{7\pi^3}{24}. \end{aligned}$$

次に, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ を用いて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx.$$

部分積分により

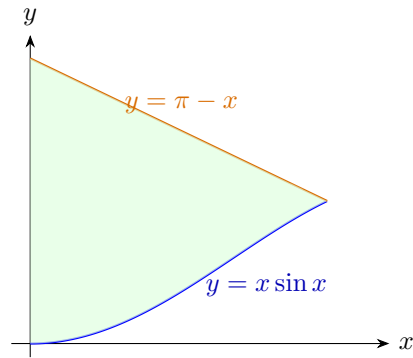
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx &= \left[\frac{x^2 \sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx \\ &= - \left[-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{24} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\frac{7\pi^3}{24} - \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \pi \left(\frac{13\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \frac{\pi^2(13\pi^2 - 6)}{48}. \end{aligned}$$



▶ 解法 2 (外側と内側の回転体を分ける)

【方針】

囲まれた領域の回転体を、直線 $y = \pi - x$ の下の回転体から曲線 $y = x \sin x$ の下の回転体を引いたものとして計算する。

【解答】

接線の傾きは

$$f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

なので、法線は

$$y = \pi - x$$

である。区間

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

ではこの直線が曲線の上側にある。

まず外側の回転体の体積は

$$\begin{aligned} V_{\text{out}} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)^2 dx \\ &= \frac{7\pi^4}{24}. \end{aligned}$$

内側は

$$V_{\text{in}} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx.$$

半角公式と 2 回の部分積分により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{out}} - V_{\text{in}} \\ &= \frac{7\pi^4}{24} - \left(\frac{\pi^4}{48} + \frac{\pi^2}{8} \right) \\ &= \frac{\pi^2(13\pi^2 - 6)}{48}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 15～20 分。採点ポイントは、法線 $y = \pi - x$ を正しく求めること、区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で法線が曲線の上側にあることを確認すること、体積を

$$\pi \int \{(\pi - x)^2 - (x \sin x)^2\} dx$$

と立てることです。

誤りやすいのは、接線の傾きをそのまま法線に使うこと、または回転体で半径の差を 2 乗してしまうことです。断面は外半径と内半径の 2 乗の差であり、積分では $x^2 \sin^2 x$ の処理が山場です。答えは、法線、上下関係、体積設定、積分計算の順に分けると、式の意味が明確になります。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 3 問】

四面体 $OABC$ は次の 2 つの条件

- (i) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$
- (ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている。このとき、この四面体は正四面体であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

頂点 O を原点とみなし、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ をベクトルで表す。対辺の直交条件から 3 つの内積が等しいことを示し、側面の面積条件で 3 本の長さをそろえる。最後に底面 ABC の面積条件を使って内積を決め、全辺同長を導く。

【解答】

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ とおく。条件 $AB \perp OC$, より $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0$ であるから、 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ である。同様に $BC \perp OA$, $CA \perp OB$ より

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$$

が成り立つ。したがって 3 つの内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$$

はすべて等しい。この共通値を p とおく。

また $|\mathbf{a}|^2 = x, |\mathbf{b}|^2 = y, |\mathbf{c}|^2 = z$ とおく。三角形 OAB, OBC, OCA の面積の 2 乗はそれぞれ $\frac{xy - p^2}{4}, \frac{yz - p^2}{4}, \frac{zx - p^2}{4}$ である。4 つの面の面積がすべて等しいので、特にこの 3 つは等しく、 $xy = yz = zx$ を得る。 $x, y, z > 0$ であるから $x = y = z = s$ とおける。

このとき三角形 OAB の面積の 2 乗は $\frac{s^2 - p^2}{4}$ である。一方、三角形 ABC について

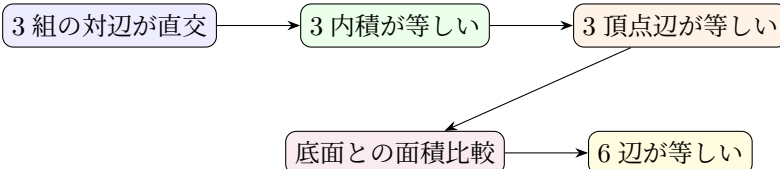
$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$$

とすると $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 2(s - p), |\mathbf{c} - \mathbf{a}|^2 = 2(s - p)$, また $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = p - p - p + s = s - p$ である。よって三角形 ABC の面積の 2 乗は

$$\frac{1}{4} \{ 2(s - p) \cdot 2(s - p) - (s - p)^2 \} = \frac{3(s - p)^2}{4}.$$

面積が等しいから $s^2 - p^2 = 3(s - p)^2$. 四面体はつぶれていないので $s - p > 0$ であり、両辺を $s - p$ で割ると $s + p = 3(s - p)$ となる。したがって $p = \frac{s}{2}$ である。

最後に各辺の長さを比べると $OA^2 = OB^2 = OC^2 = s$ であり、また $AB^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 2(s - p) = s$ である。同様に $BC^2 = CA^2 = s$ である。したがって 6 本の辺はすべて等しく、四面体 $OABC$ は正四面体である。



▶ 解法 2 (辺長と余弦で整理する)

【方針】

対辺直交を内積の等式へ直し、3 側面の面積から頂点辺 3 本を等しくする。最後に底面の面積条件で共通内積を決める。

【解答】

3 本の頂点辺の長さを u, v, w とする。対辺直交の 3 条件から

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = q$$

を得る。三角形 OAB, OBC, OCA の面積の 2 乗は

$$\frac{u^2 v^2 - q^2}{4}, \quad \frac{v^2 w^2 - q^2}{4}, \quad \frac{w^2 u^2 - q^2}{4}$$

である。これらが等しく $u, v, w > 0$ だから

$$u = v = w = \ell.$$

さらに

$$AB^2 = BC^2 = CA^2 = 2(\ell^2 - q)$$

なので、底面 ABC は正三角形である。底面と側面の面積が等しいことから

$$\frac{3}{4}(\ell^2 - q)^2 = \frac{1}{4}(\ell^4 - q^2).$$

$\ell^2 - q > 0$ で割れば

$$3(\ell^2 - q) = \ell^2 + q, \quad q = \frac{\ell^2}{2}.$$

ゆえに

$$AB^2 = BC^2 = CA^2 = \ell^2 = OA^2 = OB^2 = OC^2.$$

したがって四面体は正四面体である。

【総評】 難度 8、計算量 6。目安時間は 18~25 分。採点ポイントは、対辺の直交条件から 3 つの内積を同じ値 p にそろえること、3 つの側面の面積等式から $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ を導くこと、底面 ABC の面積まで使って $p = \frac{s}{2}$ を得ることです。

誤りやすいのは、直交条件だけで正四面体と結論してしまうこと、または面積公式の 2 乗で係数 $\frac{1}{4}$ を落とすことです。答案は、内積の整理、側面の面積比較、底面の面積比較、辺長の確認という 4 段階に分けると、条件を使い切ったことが明確になります。理系でも計算より論証の整理が得点を左右します。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 4 問】

多項式 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は多項式 $x^2 + x + 1$ で割り切れるか.

▶ 解法 1

【方針】

$x^2 + x + 1$ の根は 1 でない 3 乗根であるため、100 乗は 3 で割った余りだけで整理できる。根を代入して値が 0 になることを示すのが基本方針である。別解として、 $x^2 + x + 1$ で割った余りだけを計算しても同じ結論を得られる。

【解答】

ω を $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$ を満たす数とする。 $x^2 + x + 1$ の 2 つの根は ω, ω^2 である。

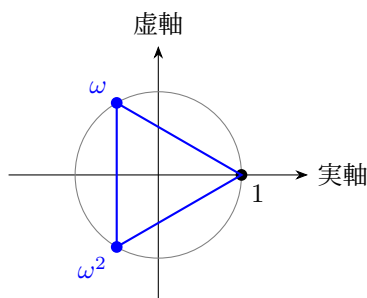
多項式 $P(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ を考える。100 $\equiv 1 \pmod{3}$ であるから $\omega^{100} = \omega$ である。また $\omega + 1 = -\omega^2$, $\omega^2 + 1 = -\omega$ である。したがって

$$\begin{aligned} P(\omega) &= (\omega^{100} + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= (\omega + 1)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 \\ &= (-\omega^2)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 \\ &= \omega^{200} + \omega^{100} + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

同様に、 ω^2 を代入しても $(\omega^2)^{100} = \omega^2$ を用いれば $P(\omega^2) = 0$ となる。

よって $P(x)$ は $x^2 + x + 1$ の 2 つの根をともに根にもつ。したがって

$$(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1 \text{ は } x^2 + x + 1 \text{ で割り切れる。}$$



$$100 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow \omega^{100} = \omega$$

▶ 解法 2 (剰余計算)

【方針】

法 $x^2 + x + 1$ で $x^3 \equiv 1$ を使い、巨大な指数を 3 での剰余へ落とす。

【解答】

法 $x^2 + x + 1$ で考える。このとき

$$x^2 + x + 1 \equiv 0, \quad x^3 \equiv 1$$

である。 $100 \equiv 1 \pmod{3}$ だから

$$x^{100} \equiv x.$$

また

$$x + 1 \equiv -x^2, \quad x^2 + 1 \equiv -x.$$

したがって、与えられた多項式を $P(x)$ とすると

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv (x+1)^{100} + (x^2+1)^{100} + 1 \\ &\equiv (-x^2)^{100} + (-x)^{100} + 1 \\ &\equiv x^{200} + x^{100} + 1 \\ &\equiv x^2 + x + 1 \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

よって $P(x)$ は

$$x^2 + x + 1$$

で割り切れる。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 8~12 分。採点ポイントは、 $x^2 + x + 1 = 0$ から $x^3 = 1$ 、 $x \neq 1$ を使える形にすること、100 乗を 3 で割った余りに落とすこと、2 つの根または余り計算で 0 を確認することです。

誤りやすいのは、 $100 \equiv 1 \pmod{3}$ の処理を $x^{100} = 1$ としてしまうことです。根を代入する解法では $\omega^{100} = \omega$ 、余りで計算する別解では x^{100} の余りが x であることを明確にします。大きな指数を展開しない判断が、この問題の時間短縮のポイントです。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 5 問】

a, b, c, d を実数とする。2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 次の単位行列 E に対して、集合 $L(A)$ を $L(A) = \{rE + sA \mid r, s \text{ は実数}\}$ とする。このとき次の条件 (*) が成立するための、 a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ。

(*) $L(A)$ の要素 B は零行列でなければ逆行列をもつ

▶ 解法 1

【方針】

最初に A が単位行列の実数倍かどうかを分ける。実数倍なら $L(A)$ は非零スカラー行列だけなので条件を満たす。それ以外では E, A が一次独立であり、 $\det(rE + sA)$ を $\frac{r}{s}$ の 2 次式として判別式を調べる。

【解答】

まず A が単位行列の実数倍である場合を分ける。

$$a = d, \quad b = c = 0$$

なら $A = aE$ であり、

$$L(A) = \{(r + as)E \mid r, s \text{ は実数}\}$$

である。したがって零行列でない要素はすべて逆行列をもち、条件 (*) は成立する。

以下 A は E の実数倍でないとする。このとき E, A は実数上で一次独立だから、

$$rE + sA = O \iff (r, s) = (0, 0)$$

である。

$B = rE + sA$ とおくと

$$B = \begin{pmatrix} r + sa & sb \\ sc & r + sd \end{pmatrix}$$

であり、

$$\det B = r^2 + (a + d)rs + (ad - bc)s^2.$$

$s = 0, r \neq 0$ なら $\det B = r^2 > 0$ である。 $s \neq 0$ のとき $t = \frac{r}{s}$ とおけば

$$\frac{\det B}{s^2} = t^2 + (a + d)t + (ad - bc).$$

この 2 次式がすべての実数 t に対して 0 でないための必要十分条件は、判別式が負であることである。その判別式は

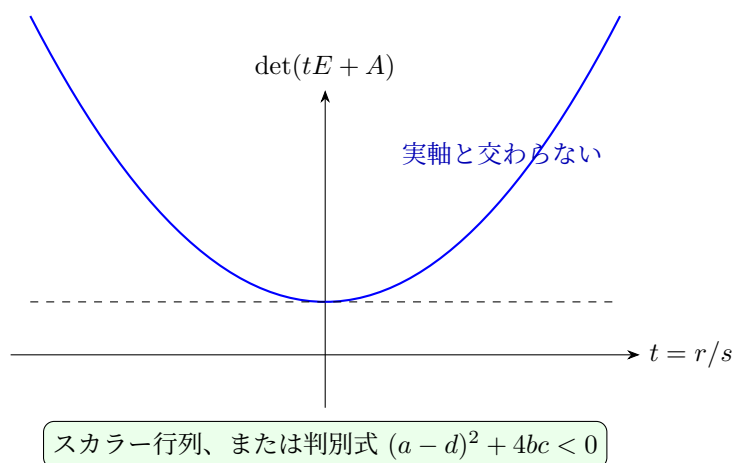
$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc.$$

判別式が 0 以上なら実数解 t があり、 $(r, s) = (t, 1)$ により、一次独立性から零行列でない特異行列が得られる。

以上より必要十分条件は

$$\begin{cases} a = d, b = c = 0, \\ \text{または} \\ (a - d)^2 + 4bc < 0 \end{cases}$$

である。



▶ 解法 2 (跡を除いた行列で見る)

【方針】

A から跡の半分だけ単位行列を引く。残りが零行列ならスカラー行列の場合として先に確定し、そうでなければ残った行列の 2 乗が単位行列の定数倍になることから特異行列の有無を読む。

【解答】

まず次の行列を置く。

$$C = A - \frac{a+d}{2}E = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}.$$

もし $C = O$ なら

$$a = d, \quad b = c = 0$$

であり、 $A = aE$ である。このとき

$$L(A) = \{tE \mid t \text{ は実数}\}$$

だから、零行列でない要素はすべて逆行列をもつ。

以下 $C \neq O$ とする。直接計算すると

$$C^2 = \left\{ \frac{(a-d)^2}{4} + bc \right\} E = \frac{\Delta}{4} E, \quad \Delta = (a-d)^2 + 4bc.$$

任意の $rE + sA$ は、実数 u を用いて

$$rE + sA = uE + sC$$

と書ける。ここで

$$(uE + sC)(uE - sC) = \left(u^2 - \frac{\Delta}{4}s^2 \right) E.$$

$\Delta < 0$ なら、 $(u, s) \neq (0, 0)$ に対して

$$u^2 - \frac{\Delta}{4}s^2 > 0$$

だから $uE + sC$ は逆行列をもつ。

逆に $\Delta \geq 0$ なら

$$u = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}s$$

となる組を選べる。 $\Delta = 0$ のときも $u = 0, s = 1$ とすればよく、 $C \neq O$ だから得られる行列は零行列ではない。このとき行列式が 0 となるので条件 (*) に反する。

したがって必要十分条件は

$$\begin{cases} a = d, \quad b = c = 0, \\ \text{または} \\ (a-d)^2 + 4bc < 0 \end{cases}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 5。目安時間は 15~20 分。最重要点は、 A が単位行列の実数倍なら E, A が一次独立でないため、0 でない係数の組が零行列を表す場合があることです。この場合は $L(A) = \{tE\}$ となり条件 (*) を満たします。スカラー行列でない場合に限って、行列式の 2 次形式が非零係数の組で消えない条件を判別式で調べます。判別式が 0 のときも、非零の特異行列が生じるので除外します。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。

【第 6 問】

n チームがリーグ戦を行う. すなわち, 各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する. 引き分けはないものとし, 勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で, 各回の勝敗は独立に決まるものとする. このとき, $(n-2)$ 勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームである確率を求めよ. ただし, n は 3 以上とする.

▶ 解法 1

【方針】

まず $n-2$ 勝 1 敗になる 2 チームを選び, 2 チーム同士の勝敗を決める. その後, 片方の唯一の敗戦相手を残りチームから選び, 固定された試合と自由な試合を分けて数える. 最後に 3 チーム目も $n-2$ 勝 1 敗になってしまう場合だけを除き, 全事象数で割る.

【解答】

全試合数は ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ であり, すべての勝敗の総数は $2^n C_2$ である.

ちょうど 2 チームが $n-2$ 勝 1 敗になる場合を数える. まず, その 2 チームを選ぶ方法は ${}_nC_2$ 通りである. 選ばれた 2 チームを A, B とし, ここでは A が B に勝つ場合を考える. A, B の直接対戦の勝敗は 2 通りあるので, 最後に 2 倍すればよい. A が B に勝つとする. B が $n-2$ 勝 1 敗であるためには, B の唯一の敗戦は A との試合でなければならない. したがって B は, A 以外のすべてのチームに勝つ.

一方, A も $n-2$ 勝 1 敗であり, すでに B には勝っている. よって A に勝つチームを, 残り $n-2$ チームの中から 1 つ選ぶ必要がある. この選び方は $n-2$ 通りである. このチームを C とする. すると C は A に勝ち, A は C 以外の残りのチームにはすべて勝つ.

ここまでで, A, B と他のチームとの試合はすべて決まった. 残る自由な試合は, A, B を除く $n-2$ チーム同士の試合であり, その数は ${}_{n-2}C_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ である. したがって一見すると $2^{n-2} C_2$ 通りある.

ただし, この中には C も $n-2$ 勝 1 敗になってしまう場合が含まれている. C はすでに B に負け, A に勝っているので, 残りの $n-3$ チームすべてに勝つと, C も $n-2$ 勝 1 敗になる. この場合は除かなければならない. C が残り $n-3$ チームすべてに勝つことを固定すると, それ以外の残り $n-3$ チーム同士の試合は自由であり, その数は $2^{n-3} C_2$ 通りである.

なお, C 以外の残りのチームは, すでに A と B の両方に負けているため, $n-2$ 勝 1 敗になることはない. したがって除くべき場合は上の C の場合だけである.

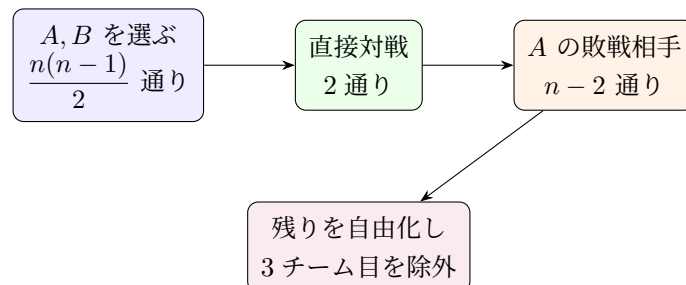
以上より, 条件を満たす勝敗表の数は

$${}_nC_2 \cdot 2 \cdot (n-2) \{2^{n-2} C_2 - 2^{n-3} C_2\}$$

である. したがって求める確率は

$$\frac{{}_nC_2 \cdot 2(n-2) \{2^{n-2} C_2 - 2^{n-3} C_2\}}{2^n C_2}$$

である.



▶ 解法 2 (条件付き確率で数える)

【方針】

該当する 2 チームを固定し、その 2 チームだけが 1 敗となる条件付き確率を求める。最後に組の選び方を掛ける。

【解答】

該当する 2 チームを A, B と固定する。まず A が B に勝つ向きを考える。 B は他の全チームに勝たなければならず、 A の唯一の敗戦相手 C は残り $n-2$ チームから選ぶ。

A, B に関係する試合を固定した後、残り $n-2$ チーム間には

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

試合がある。ただし C が残りの $n-3$ チームすべてに勝つと、 C も $n-2$ 勝 1 敗になる。この除外後の自由度は

$$2^{n-2C_2} - 2^{n-3C_2}$$

通りである。

A, B の勝敗の向きは 2 通り、該当する 2 チームの選び方は

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

通りである。全勝敗表は

$$2^{nC_2}$$

通りだから、求める確率は

$$\frac{n(n-1)(n-2) \{2^{n-2C_2} - 2^{n-3C_2}\}}{2^{nC_2}}.$$

$n=3$ では波括弧内が 0 となり、実際に条件を満たす勝敗表がないこととも一致する。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 18~24 分。採点ポイントは、ちょうど 2 チームを先に選ぶこと、2 チーム同士の勝敗を固定した後に片方の唯一の敗戦相手 C を選ぶこと、残り自由な試合数から C も条件を満たす場合を差し引くことです。

誤りやすいのは、 C が 3 チーム目の $n-2$ 勝 1 敗になる場合を除き忘れることです。一方で、 C 以外のチームはすでに A, B の両方に負けているため、余分に除く必要はありません。答えは、選ぶもの、固定される試合、自由な試合、除外する試合を順に書くと、指数の数え間違いを抑えられます。

第 1 解法は標準的な答案構成を詳しく示し、第 2 解法は異なる着眼または計算経路で同じ結論を再確認する。図は式変形の役割と条件の使いどころを可視化した。積分・極限・総和は独立行に置き、分数は表示サイズで組版した。