

京都大学 2008 年度 文系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数 a, b, c に対して $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする. このとき

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx \leq 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$$

であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

$f(x) = ax^2 + bx + c$ をそのまま代入し, 左右の積分を a, b, c で表す. $[-1, 1]$ 上では奇関数の積分が消えるため, x の奇数乗を含む項を落として整理できる. 最後は右辺から左辺を引き, $(a+3c)^2 + 2b^2$ の形の平方和になることを示せばよい. 不等式の証明なので, 差が非負であることと等号条件まで確認する.

【解答】

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると $f'(x) = 2ax + b$ である. まず左辺を計算する.

$$\begin{aligned} (1-x^2)\{f'(x)\}^2 &= (1-x^2)(2ax+b)^2 \\ &= (1-x^2)(4a^2x^2 + 4abx + b^2). \end{aligned}$$

$[-1, 1]$ で奇関数の積分は 0 になるので, $4abx(1-x^2)$ の積分は消える. したがって

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx &= 4a^2 \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx + b^2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= 4a^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) + b^2 \left(2 - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{16}{15}a^2 + \frac{4}{3}b^2. \end{aligned}$$

次に右辺を計算する.

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 &= (ax^2 + bx + c)^2 \\ &= a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx. \end{aligned}$$

ここでも奇関数の項の積分は消えるから,

$$\begin{aligned} 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx &= 6 \left(a^2 \cdot \frac{2}{5} + b^2 \cdot \frac{2}{3} + c^2 \cdot 2 + 2ac \cdot \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{12}{5}a^2 + 4b^2 + 12c^2 + 8ac. \end{aligned}$$

よって右辺から左辺を引くと

$$\begin{aligned} &6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx \\ &= \left(\frac{12}{5} - \frac{16}{15} \right) a^2 + \left(4 - \frac{4}{3} \right) b^2 + 8ac + 12c^2 \\ &= \frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}b^2 + 8ac + 12c^2 \\ &= \frac{4}{3}\{(a+3c)^2 + 2b^2\}. \end{aligned}$$

これは常に 0 以上である. したがって

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx \leq 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$$

が成り立つ. なお等号は $a+3c=0$ かつ $b=0$ のときに起こる.

▶ 解法 2 (偶関数部分と奇関数部分を分ける方法)

【方針】

$f(x) = g(x) + h(x)$, $g(x) = ax^2 + c$, $h(x) = bx$ と偶関数部分・奇関数部分に分ける。対称区間では偶関数と奇関数の積の積分が 0 になるので、示すべき差も g の寄与と h の寄与に分離する。それぞれを計算すると平方と正の項になる。

【解答】

$g(x) = ax^2 + c$, $h(x) = bx$ とおくと、 g は偶関数、 h は奇関数であり、

$$f = g + h, \quad f' = g' + h'$$

である。 g' は奇関数、 h' は偶関数だから、対称区間 $[-1, 1]$ では交差項の積分が消える。したがって

$$\begin{aligned} & 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x^2) \{f'(x)\}^2 dx \\ &= \left[6 \int_{-1}^1 g(x)^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x^2) g'(x)^2 dx \right] \\ & \quad + \left[6 \int_{-1}^1 h(x)^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x^2) h'(x)^2 dx \right]. \end{aligned}$$

まず $g(x) = ax^2 + c$, $g'(x) = 2ax$ なので

$$6 \int_{-1}^1 g(x)^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x^2) g'(x)^2 dx = \frac{4}{3} (a+3c)^2.$$

また $h(x) = bx$, $h'(x) = b$ なので

$$6 \int_{-1}^1 h(x)^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x^2) h'(x)^2 dx = \frac{8}{3} b^2.$$

よって全体の差は

$$\frac{4}{3} \{(a+3c)^2 + 2b^2\} \geq 0$$

である。これが求める不等式である。等号は $a+3c=0$ かつ $b=0$ のときに限る。

【総評】 係数計算型の不等式証明で、想定時間は 12 分から 15 分、難易度は 5、計算量は 4 程度。 $[-1, 1]$ の対称性で奇関数項が消えることを使うと計算がかなり短くなる。採点上は、左右を別々に計算したあと、差を $(a+3c)^2 + 2b^2$ の平方和へ落とすところが中心である。途中で小数や近似を使う必要はなく、分数係数を丁寧に保つことがミス防止になる。

【第 2 問】

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える．辺 AB の中点を M とし、辺 AB を延長した直線上に点 N を、 $AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる．このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ．ただし、点 N は辺 AB 上にはないものとする．

▶ 解法 1 (角の二等分線定理の逆)

【方針】

$AB = AC = s$ とし、 A を原点、 B を x 軸上に置く．比の条件から $BN = AB = s$ である．一般の二等辺三角形のまま CM と CN を計算すると $CN = 2CM$ が得られ、 $MB : BN = CM : CN$ となる．三角形 CMN で角の二等分線定理の逆を使う．

【解答】

$AB = AC = s$ とする． N は辺 AB 上になく、

$$AN : NB = 2 : 1$$

である． N が A 側の延長上にあると $AN < NB$ となるため条件を満たさない．したがって N は B 側の延長上にあり、

$$AN = AB + BN = s + BN = 2BN$$

から $BN = s$ である．また M は AB の中点なので $MB = s/2$ である．

$A = (0, 0)$, $B = (s, 0)$ と置き、 $\angle BAC = \theta$ とすると

$$C = (s \cos \theta, s \sin \theta), \quad M = \left(\frac{s}{2}, 0\right), \quad N = (2s, 0)$$

である．よって

$$\begin{aligned} CM^2 &= s^2 \left\{ \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + \sin^2 \theta \right\} = s^2 \left(\frac{5}{4} - \cos \theta \right), \\ CN^2 &= s^2 \{ (\cos \theta - 2)^2 + \sin^2 \theta \} = s^2 (5 - 4 \cos \theta) = 4CM^2. \end{aligned}$$

したがって $CN = 2CM$ であり、

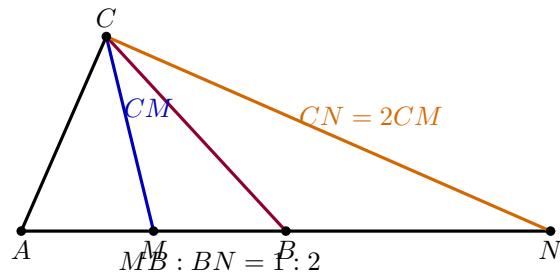
$$MB : BN = \frac{s}{2} : s = 1 : 2 = CM : CN$$

となる．

点 B は線分 MN 上にある．三角形 CMN に角の二等分線定理の逆を適用すると、 CB は $\angle MCN$ の二等分線である．ゆえに

$$\angle BCM = \angle MCB = \angle BCN$$

が成り立つ．



三角形 CMN で、点 B は角の二等分線の比を満たす。

▶ 解法 2 (単位方向ベクトルの和)

【方針】

長さを $AB = AC = 2$ と規格化し、 $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $M = (1, 0)$, $N = (4, 0)$ と置く。 $C = (u, v)$ は $u^2 + v^2 = 4$ を満たす。 $CN = 2CM$ を確かめ、 C から M, N へ向かう 2 本の単位ベクトルの和が CB と平行になることを示す。

【解答】

相似によって $AB = AC = 2$ としてよい。

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad M = (1, 0), \quad N = (4, 0)$$

と置き、 $C = (u, v)$ とする。 $AC = 2$ から

$$u^2 + v^2 = 4$$

である。すると

$$\begin{aligned} CM^2 &= (u-1)^2 + v^2 = 5 - 2u, \\ CN^2 &= (u-4)^2 + v^2 = 20 - 8u = 4CM^2. \end{aligned}$$

よって $CN = 2CM$ である。

C から M, N へ向かう単位ベクトルの和は

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{CM}}{CM} + \frac{\overrightarrow{CN}}{CN} &= \frac{2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN}}{2CM} \\ &= \frac{2(M-C) + (N-C)}{2CM} \\ &= \frac{2M + N - 3C}{2CM}. \end{aligned}$$

ここで $2M + N = (6, 0) = 3B$ だから、上式は

$$\frac{3(B-C)}{2CM} = \frac{3\overrightarrow{CB}}{2CM}$$

となる。2 本の単位方向ベクトルの和は、そのなす角の内角二等分線の方角を向く。したがって CB は $\angle MCN$ を二等分し、

$$\angle BCM = \angle BCN$$

である。

【総評】 既存答案にあった「二等辺三角形だから頂点 C は辺 AB の垂直二等分線上にある」という誤りを除き、一般の二等辺三角形のまま証明した。想定時間は 15 分前後、難易度は 5、計算量は 4 程度。核心は $BN = AB$ と $CN = 2CM$ であり、三角形 CMN に角の二等分線定理の逆を使うと最短である。

【第 3 問】

定数 a は実数であるとする. 方程式 $(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$ を満たす実数 x はいくつあるか. a の値によって分類せよ.

【方針】

積の方程式なので, 2 つの 2 次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ と $3x^2 + ax - 3 = 0$ を別々に調べる. 第 1 因子は判別式 $a^2 - 4$ で実根数が変わり, 第 2 因子は判別式 $a^2 + 36$ により常に異なる 2 実根をもつ. ただし 2 つの因子が同じ実数解を持つ場合は重複して数えないため, 共通解の条件を代入で求める. 最後に $|a|$ の範囲で個数を分類する.

【解答】

方程式は $(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$ であるから, $x^2 + ax + 1 = 0$ または $3x^2 + ax - 3 = 0$ を満たす実数 x を数えればよい.

まず第 1 因子について, 判別式は $D_1 = a^2 - 4$ である. したがって実数解の個数は

$$|a| < 2 \text{ で } 0 \text{ 個}, \quad |a| = 2 \text{ で } 1 \text{ 個}, \quad |a| > 2 \text{ で } 2 \text{ 個}$$

である.

次に第 2 因子について, 判別式は $D_2 = a^2 + 36$ であり, これは常に正である. したがって第 2 因子はすべての実数 a に対して異なる 2 個の実数解をもつ.

ただし, 2 つの 2 次方程式が共通解をもつ場合は, その解を二重に数えてはいけな. 共通解 x があるとする. 第 1 式から $ax = -x^2 - 1$ である. これを第 2 式に代入すると $3x^2 + ax - 3 = 3x^2 - (x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 4 = 0$ より $x^2 = 2$ である. さらに第 1 式から $ax = -3$ となるので,

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき } a = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad x = -\sqrt{2} \text{ のとき } a = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

である. したがって共通解があるのは $|a| = \frac{3}{\sqrt{2}}$ のときに限られ, このとき共通解は 1 個である. なお $3/\sqrt{2} > 2$ である.

以上をまとめると, 実数解の個数は

条件	実数解の個数
$ a < 2$	2
$ a = 2$	3
$2 < a < \frac{3}{\sqrt{2}}$	4
$ a = \frac{3}{\sqrt{2}}$	3
$ a > \frac{3}{\sqrt{2}}$	4

である.

【総評】 判別式だけなら標準的だが, 2 つの因子の共通解を忘れると $|a| = 3/\sqrt{2}$ の場合を 4 個と数えてしまう. 想定時間は 15 分から 18 分, 難易度は 5, 計算量は 4 程度. 第 2 因子は常に 2 実根をもつので, 第 1 因子の実根数を足し, 必要なときだけ重複を 1 個引くという整理がよい. $3/\sqrt{2} > 2$ を確認して表に入れると, 分類の境界が明確になる.

【第 4 問】

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3 \sin x \cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。

【方針】

$u = \sin x + \cos x$ と置き、 $\sin x \cos x = (u^2 - 1)/2$ 、 $\sin^3 x + \cos^3 x = u(3 - u^2)/2$ によって方程式を u の 3 次方程式へ変える。 u の範囲は $-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ である。3 次方程式を解く必要はなく、導関数でこの区間の増減を調べ、区間内の根が 1 個であることを示す。根が端点でないことを確認したら、 $\sin x + \cos x = u$ は $0 \leq x < 2\pi$ で 2 解を持つ。

【解答】

$u = \sin x + \cos x$ とおく。このとき $-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ であり、 $u^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$ より $\sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}$ である。また

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ &= u(1 - \sin x \cos x) \\ &= u \left(1 - \frac{u^2 - 1}{2} \right) \\ &= \frac{u(3 - u^2)}{2}. \end{aligned}$$

したがって与えられた方程式は $2\sqrt{2} \cdot \frac{u(3 - u^2)}{2} + 3 \cdot \frac{u^2 - 1}{2} = 0$ である。両辺を整理し、符号を反転して $P(u) = 2\sqrt{2}u^3 - 3u^2 - 6\sqrt{2}u + 3 = 0$ を考えればよい。

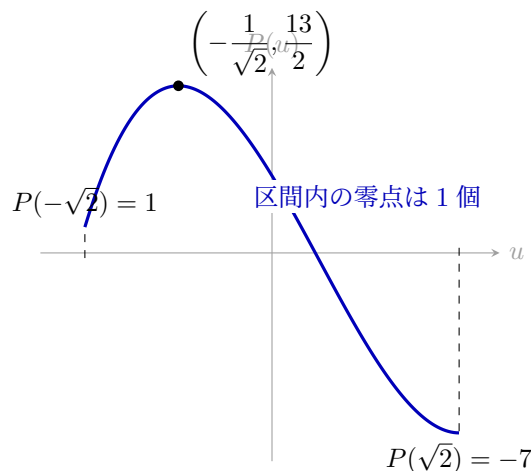
導関数は

$$P'(u) = 6\sqrt{2}u^2 - 6u - 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \left(u + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (u - \sqrt{2})$$

である。したがって $-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ において、 $P(u)$ は $-\sqrt{2} \leq u \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ で増加し、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq \sqrt{2}$ で減少する。

端点と極大点での値を調べると $P(-\sqrt{2}) = 1$ 、 $P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{13}{2}$ 、 $P(\sqrt{2}) = -7$ である。よって前半の区間では根を持たず、後半の区間で正から負へ 1 回だけ変わる。したがって許される範囲 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ の中に $P(u) = 0$ の根はただ 1 個あり、しかもそれは端点ではない。

最後に $u = \sin x + \cos x$ に戻る。 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ であるから、 $-\sqrt{2} < u < \sqrt{2}$ の各値に対して、 $0 \leq x < 2\pi$ で解は 2 個ある。今回の u の根は端点ではないので、求める x の個数は 2 である。



許容範囲 $-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ での増減。

【総評】 三角式を $u = \sin x + \cos x$ に集約できるかが勝負である。想定時間は 18 分から 20 分、難易度は 6、計算量は 4 程度。3 次方程式そのものを解こうとすると重くなるが、必要なのは許容範囲内の根の個数だけである。 u の根が 1 個でも、端点 $\pm\sqrt{2}$ なら対応する x は 1 個になるため、端点でないことを確認してから x の個数を 2 個と結論するのが重要である。

【第 5 問】

正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする. F 上の点 P に対して, 始点と終点がともに P であるような, 図形 F の一筆がきの経路の数を $N(P)$ で表す. 正 n 角形の頂点をひとつとって A とし, $a = N(A)$ とおく. また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし, $b = N(B)$ とおく. このとき a と b を求めよ.

注: 一筆がきとは, 図形を, かき始めから終わりまで, 筆を紙からはなさず, また同じ線上を通らずにかくことである.

【方針】

頂点を $A_1 = A, A_2, \dots, A_n$ とする. 隣り合う 2 頂点の間には, 正 n 角形の辺と外接円の弧の 2 本がある. 頂点 A からの経路は, 最初の進行方向, 各区間で最初に使う線, 折り返し位置の 3 段階で数える. 辺の中点 B を始点にする場合は, 頂点始点の経路のちょうど半分と対応する.

【解答】

正 n 角形の頂点を, $A_1 = A$ から順に

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

とする. 隣り合う 2 頂点の間には, 正 n 角形の辺と外接円の弧の 2 本がある.

まず $a = N(A)$ を求める. A を出発するとき, 頂点をたどる向きは時計回り・反時計回りの 2 通りである. 向きを一つ固定する.

各 i について, A_i と A_{i+1} の間を最初に通るとき, 正 n 角形の辺と円弧のどちらを使うかは 2 通りである. ただし添字は n の次を 1 とする. したがって, 各区間で最初に使う線の選び方は

$$2^n$$

通りである. 各区間を 2 回目に通る線は, 最初に使わなかった方へ一意に決まる.

この選択を固定した経路には, 次の $n+1$ 通りがある.

- (i) 折り返さず, 同じ向きに 2 周する;
- (ii) $A_1, A_2, \dots, A_n$ のいずれか 1 頂点で折り返す.

実際, 未使用の線へ移る位置を決めれば, その後は全ての未使用線を重複なく通って A へ戻る順序が一意に決まる. 逆に一筆書きでは, 2 回目の通過へ移る位置は「なし」または 1 頂点に限られるから, これで重複も漏れもない.

したがって, 最初の向き 2 通りも掛けると

$$a = 2 \cdot 2^n(n+1) = 2^{n+1}(n+1)$$

である.

次に, 辺 A_1A_n の中点を B とする. 上で数えた A_1 始点の経路のうち, A_1A_n の正 n 角形の辺を最初の周回で使うものはちょうど半数である. 各区間の「辺・円弧」の選択を入れ替える対応によって, 半数であることが分かる.

そのような閉じた経路を B で切って始点と終点を B に移すと, B 始点の一筆書きが一意に得られる. 逆に B 始点の一筆書きを B でつなぎ, 始点を A_1 へ移せば元の経路へ戻る. よって

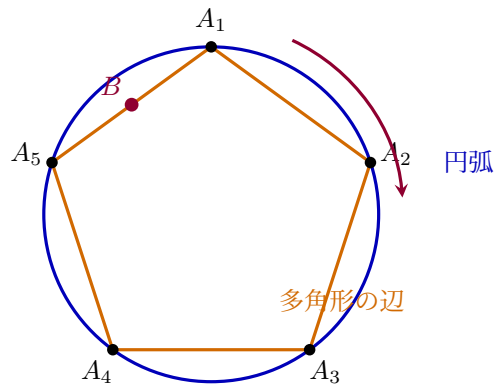
$$b = \frac{a}{2} = 2^n(n+1)$$

である.

以上より

$$a = 2^{n+1}(n+1), \quad b = 2^n(n+1)$$

を得る.



隣接頂点間ごとに「辺」と「円弧」の 2 本がある。

【総評】 図形を、隣接頂点間に 2 本ずつ線を持つグラフとして捉える難問である。想定時間は 25 分以上、難易度は 8、計算量は 5 程度。進行方向 2 通り、各区間で先に使う線を選択 2^n 通り、折り返し位置 $n+1$ 通りを独立に数えると a が得られる。 B 始点は単に最初の線が 2 通りという説明だけでは不十分で、 A 始点の経路の半数との全単射を示す必要がある。