

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 2009 年 度 理 系 (乙)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xyz 空間で

$$\begin{aligned} O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 2, 0), C(0, 2, 0), \\ D(0, 0, 4), E(3, 0, 4), F(3, 2, 4), G(0, 2, 4) \end{aligned}$$

を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える. 辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P , 辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく. ただし $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする.

点 D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が, 線分 AC (両端を含む) と交わるような s, t のみたす条件を求めよ.

第 2 問

平面上の鋭角三角形 $\triangle ABC$ の内部（辺や頂点は含まない）に点 P をとる． A' を B, C, P を通る円の中心， B' を C, A, P を通る円の中心， C' を A, B, P を通る円の中心とする．

このとき， A, B, C, A', B', C' が同一円周上にあるための必要十分条件は， P が $\triangle ABC$ の内心に一致することであることを示せ．

第 3 問

n 枚のカードを積んだ山があり、各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。

1 回の試行では、一番上のカードを取り、山の一番上にもどすか、あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。

n 回の試行を終えたとき、最初一番下にあったカード（番号 n ）が山の一番上にきている確率を求めよ。

第 4 問

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を $ad - bc = 1$ をみたす行列とする. ただし, a, b, c, d は実数である. 自然数 n に対して平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める.

$\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の長さが 1 のとき, すべての n に対して $\overrightarrow{OP_n}$ の長さが 1 であることを示せ. ここで O は原点である.

第 5 問

xy 平面上で，原点を極， x 軸の正の部分を出線とする極座標に関して，極方程式

$$r = 2 + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

により表される曲線を C とする.

C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ.

第 6 問

a と b を互いに素な正の整数とし、さらに a は奇数とする．正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を

$$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

をみたすように定めるとき、次を示せ．ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

- (1) a_2 は奇数であり、 a_2 と b_2 は互いに素である．
- (2) すべての n に対して、 a_n は奇数であり、 a_n と b_n は互いに素である．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)