

京都大学 2009 年度 理系 (乙)

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 xyz 空間で

$$O(0,0,0), A(3,0,0), B(3,2,0), C(0,2,0), \\ D(0,0,4), E(3,0,4), F(3,2,4), G(0,2,4)$$

を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える. 辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P , 辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく. ただし $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする.

点 D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が, 線分 AC (両端を含む) と交わるような s, t のみたす条件を求めよ.

【方針】

内分点を $P = (3, 0, 4s)$, $Q = (0, 2, 4t)$ と座標表示する. 平面 OPQ の法線ベクトルを, $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ の両方と垂直になるよう連立して求める. 点 D を通る法線上で $z = 0$ となる点を計算し, その点が長方形の対角線 AC 上にある条件 $x/3 + y/2 = 1$ と線分内の範囲条件を課す.

【解答】

内分点の座標は

$$P = (3, 0, 4s), \quad Q = (0, 2, 4t)$$

である. 平面 OPQ の法線ベクトルを (u, v, w) とすると

$$3u + 4sw = 0, \quad 2v + 4tw = 0.$$

ここで $w = 3$ ととれば, 法線ベクトルとして

$$(-4s, -6t, 3)$$

を得る. したがって, 点 $D(0, 0, 4)$ を通り平面 OPQ に垂直な直線は

$$(x, y, z) = (0, 0, 4) + \lambda(-4s, -6t, 3)$$

と表される.

線分 AC は平面 $z = 0$ 上にある. 上の直線で $z = 0$ とすると $4 + 3\lambda = 0$ より $\lambda = -4/3$ であり, 交点は

$$X = \left(\frac{16s}{3}, 8t, 0 \right)$$

である.

線分 AC 上の点は

$$(x, y, z) = (3(1-u), 2u, 0) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

と表される. したがって X が線分 AC 上にあるための条件は

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

すなわち

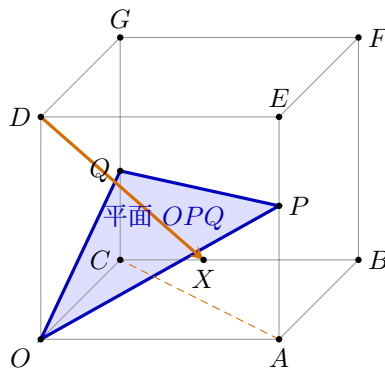
$$\frac{16s}{9} + 4t = 1.$$

この等式と $s, t > 0$ から自動的に $0 < 4t < 1$ となり, 交点は線分の内部にある. よって求める条件は

$$16s + 36t = 9, \quad 0 < s < \frac{9}{16}$$

である. このとき $t = (9 - 16s)/36$ であり, もとの $0 < t < 1$ も満たされる.

【直方体と平面 OPQ 】



模式図。法線と底面の交点 X が対角線 AC 上にある条件を課す。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 16 分程度。平面の方程式を展開するより、 OP, OQ の両方向に垂直な法線ベクトルを直接作ると短い。直線と $z=0$ の交点は一意に決まり、その点を線分 AC のパラメータ表示へ代入する。直線 AC 上という等式だけで終わらず、両端の間にあることを確認する必要があるが、今回は $s, t > 0$ と等式から $0 < 4t < 1$ が従うため追加条件は $0 < s < 9/16$ に整理できる。

【第 2 問】

平面上の鋭角三角形 $\triangle ABC$ の内部（辺や頂点は含まない）に点 P をとる。 A' を B, C, P を通る円の中心、 B' を C, A, P を通る円の中心、 C' を A, B, P を通る円の中心とする。

このとき、 A, B, C, A', B', C' が同一円周上にあるための必要十分条件は、 P が $\triangle ABC$ の内心に一致することであることを示せ。

【方針】

必要性では 6 点を通る円の中心を O とする。円 O と円 A' の共通弦が BC なので $OA' \perp BC$ 。同様の垂直関係と $OA' = OB'$ を組み合わせ、 CP が角 C を二等分することを示す。十分性では P を内心 I とし、 $\angle BIC = \pi/2 + A/2$ から円 A' の小さい中心角 $\angle BA'C = \pi - A$ を得て、四角形 $ABA'C$ が円に内接することを示す。

【解答】

まず、 A, B, C, A', B', C' が同一円周上にあると仮定し、その円の中心を O とする。中心 O の円と中心 A' の円は B, C を共通点にもつから、2 円の中心を結ぶ直線は共通弦 BC に垂直である。したがって

$$OA' \perp BC.$$

同様に

$$OB' \perp CA.$$

また、中心 A' の円と中心 B' の円は C, P を共通点にもつので

$$A'B' \perp CP.$$

A', B' はともに中心 O の円上にあるから $OA' = OB'$ であり、三角形 $OA'B'$ は二等辺三角形である。よって

$$\angle OA'B' = \angle OB'A'.$$

ABC は鋭角三角形で P はその内部にあるから、 $\alpha = \angle BCP$ 、 $\beta = \angle PCA$ とおけば

$$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}.$$

2 直線を同時に 90° 回転すると、直線どうしのなす鋭角は変わらない。したがって、 $\angle OA'B'$ は α または $\pi - \alpha$ 、 $\angle OB'A'$ は β または $\pi - \beta$ である。これら 2 つの底角は等しい。一方、 $\alpha + \beta = \angle BCA < \pi/2$ なので、一方が α 、他方が $\pi - \beta$ となる組合せは不可能である。よって、どちらの組合せでも

$$\angle BCP = \angle PCA$$

である。同様にして AP は角 A を、 BP は角 B を二等分する。 P は三角形の内部にあるから、 P は三角形 ABC の内心である。

逆に、 P が内心 I に一致すると仮定する。 $A = \angle BAC$ と書くと、内心の性質より

$$\angle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}.$$

A' は B, C, I を通る円の中心である。円周角 $\angle BIC$ が弧 BC の大きい方に対応するので、小さい中心角は

$$\angle BA'C = 2\pi - 2\angle BIC = \pi - A.$$

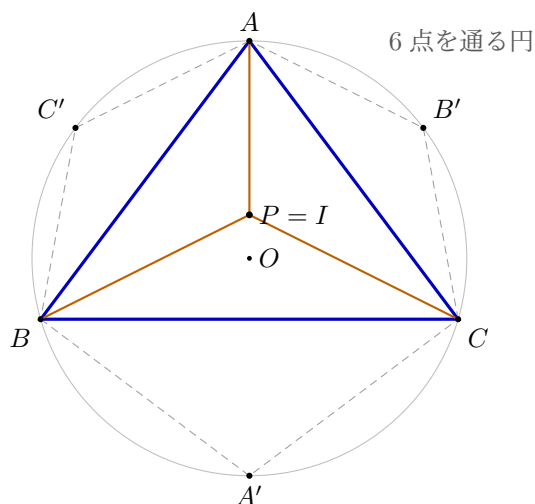
したがって

$$\angle BAC + \angle BA'C = \pi$$

であり、四角形 $ABA'C$ は円に内接する。その円は A, B, C を通る三角形 ABC の外接円であるから、 A' は外接円上にある。同様に B', C' も同じ外接円上にある。

以上より、6 点が同一円周上にあることと、 P が内心であることは同値である。

【十分性で現れる配置】



P が内心のときの模式図。 A', B', C' は $\triangle ABC$ の外接円上に並ぶ。

【総評】 難度 9、計算量 6。想定時間は 35 分程度。必要条件と十分条件を分けて書くことが必須の純粋幾何の難問である。必要性では「2 円の中心を結ぶ直線は共通弦に垂直」を 3 組に適用し、外接円の半径 $OA' = OB'$ から角の二等分を引き出す。十分性では内心の角 $\angle BIC = \pi/2 + A/2$ と、対応する中心角が小さい方では $2\pi - 2\angle BIC$ になる点が最大の注意。向かい合う角の和が π と明示して円周上を結論する。

【第 3 問】

n 枚のカードを積んだ山があり、各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。

1 回の試行では、一番上のカードを取り、山の一番上にもどすか、あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。

n 回の試行を終えたとき、最初一番下にあったカード (番号 n) が山の一番上にきている確率を求めよ。

【方針】

番号 n のカードより上にあるカードの枚数を状態 k とする。 $k > 0$ のとき、1 回の操作で k はそのままか 1 だけ減り、減る確率は $(n-k)/n$ 、そのままの確率は k/n である。初期値 $n-1$ から n 回後に 0 となるには、最初の $n-1$ 回で全て減って最後に番号 n を一番上へ戻す場合と、正の状態のどこかで 1 回だけ停滞する場合の 2 種類しかない。

【解答】

番号 n のカードより上にあるカードの枚数を k とする。 $k > 0$ のとき、一番上のカードを取り除いた直後は上のカードが $k-1$ 枚になる。取り出したカードを番号 n のカードより上へ戻す方法は k 通り、下へ入れる方法は $n-k$ 通りである。したがって

$$P(k \rightarrow k) = \frac{k}{n}, \quad P(k \rightarrow k-1) = \frac{n-k}{n}.$$

初めは $k = n-1$ であり、1 回の試行で k は高々 1 しか減らない。

まず、最初の $n-1$ 回で毎回 k が 1 ずつ減る確率を p とすると

$$p = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}.$$

この後は番号 n のカード自身が一番上にある。第 n 回でこのカードを再び一番上へ戻す確率は $1/n$ だから、この場合の確率は p/n である。

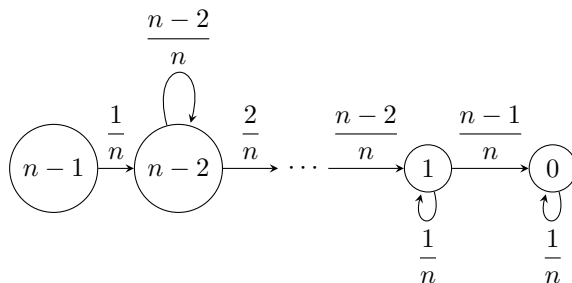
次に、第 n 回で初めて $k=0$ となる場合を考える。この場合、 n 回のうち $n-1$ 回は k が 1 減り、残る 1 回だけ正の状態 k にとどまる。この停滞が状態 k で起こる確率は、全て減る経路の確率 p に k/n を掛けたものである。 $k = 1, 2, \dots, n-1$ を合計すると

$$p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} = p \frac{n-1}{2}.$$

以上の 2 つの場合は互いに排反であり、これら以外には n 回で $k=0$ になれない。したがって求める確率は

$$\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{2} \right) = \frac{(n-1)! \{n(n-1) + 2\}}{2n^n}.$$

【状態の移り方】



状態は「番号 n のカードより上にある枚数」。正の状態では、1 回に 0 または 1 だけ減る。

【総評】 難度 8、計算量 6。想定時間は 25 分程度。山全体の並びを追うと状態数が大きすぎるが、目標カードより上の枚数だけなら毎回 0 または 1 しか減らない。 $n-1$ から n 回で 0 へ行くには停滞が高々 1 回という観察が核心である。全て減る基準経路の確率 $(n-1)!/n^{n-1}$ を先に作り、停滞する状態 k の確率 k/n を足す。早く一番上へ達した場合は最終回に目標カード自身を引くため、別に $1/n$ を掛けることを忘れない。

【第 4 問】

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を $ad - bc = 1$ をみたす行列とする. ただし, a, b, c, d は実数である. 自然数 n に対して平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める.

$\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の長さが 1 のとき, すべての n に対して $\overrightarrow{OP_n}$ の長さが 1 であることを示せ. ここで O は原点である.

▶ 解法 1

【方針】

$T = a + d$ と置き, 行列を直接掛けて $A^2 - TA + E = 0$ を示す. これにより位置ベクトル $\vec{v}_n = \overrightarrow{OP_n}$ は $\vec{v}_{n+2} = T\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n$ を満たす. また $\vec{e} = (1, 0)$ は $\vec{e} = T\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ と書ける. 3 本の単位ベクトルの関係から, $T = 0$ または $T = 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ を得て, 内積と長さが保たれることを帰納する.

【解答】

E を 2 次の単位行列, $T = a + d$ とする. $ad - bc = 1$ を用いて直接計算すると

$$A^2 - TA + E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{v}_n = \overrightarrow{OP_n} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば

$$\vec{v}_{n+2} = T\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n.$$

また, 上の行列恒等式に A^{-1} を掛けると $A^{-1} = TE - A$ である. $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば $\vec{v}_1 = A\vec{e}$, $\vec{v}_2 = A^2\vec{e}$ なので

$$\vec{e} = T\vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

仮定より $|\vec{e}| = |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ である. この等式の両辺の長さの平方をとると

$$1 = T^2 + 1 - 2T(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2),$$

したがって

$$T\{T - 2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\} = 0.$$

まず $T = 0$ のとき, この漸化式は $\vec{v}_{n+2} = -\vec{v}_n$ となるから, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ より全ての n で $|\vec{v}_n| = 1$ である.

次に $T \neq 0$ とする. $c_0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ とおけば, 上の等式より $T = 2c_0$ である. ある n について

$$|\vec{v}_n| = |\vec{v}_{n+1}| = 1, \quad \vec{v}_n \cdot \vec{v}_{n+1} = c_0$$

が成り立つと仮定する. 漸化式より

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{n+2}|^2 &= |T\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n|^2 \\ &= T^2 + 1 - 2Tc_0 = 1, \end{aligned}$$

また

$$\vec{v}_{n+1} \cdot \vec{v}_{n+2} = T - c_0 = c_0.$$

したがってこの性質は $n+1$ でも成り立つ. $n=1$ では仮定により成立しているから, 数学的帰納法により全ての自然数 n について

$$|\overrightarrow{OP_n}| = |\vec{v}_n| = 1$$

である.

▶ 解法 2

【方針】

第 1 列から $(x_1, y_1) = (a, c)$ と読み、長さ条件で $a^2 + c^2 = 1$ を得る。次に P_2 の成分を $ad - bc = 1$ で整理すると、2 本目の長さ条件は $(a + d)(d - a) = 0$ と同値になる。 $d = a$ では回転型、 $d = -a$ では $A^2 = -E$ 型に分け、各場合で軌道の長さが保存されることを直接示す。

【解答】

第 1 列を読むと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

である。したがって $a^2 + c^2 = 1$ である。また

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc \\ ac + cd \end{pmatrix}.$$

$ad - bc = 1$ より

$$x_2 = a(a + d) - 1, \quad y_2 = c(a + d).$$

これと $x_2^2 + y_2^2 = 1$ 、 $a^2 + c^2 = 1$ を用いると

$$\{a(a + d) - 1\}^2 + c^2(a + d)^2 = 1,$$

すなわち

$$(a + d)(d - a) = 0.$$

$d = a$ の場合、 $a^2 - bc = 1$ と $a^2 + c^2 = 1$ から $c(b + c) = 0$ である。 $c \neq 0$ なら $b = -c$ なので

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + c^2 = 1.$$

この行列は任意のベクトルの長さを保つ。 $c = 0$ なら $a = \pm 1$ であり、 $A^n(1, 0)^T = ((\pm 1)^n, 0)^T$ だから、やはり長さは 1 である。

$d = -a$ の場合、 $-a^2 - bc = 1$ より

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^2 = -E.$$

したがって $\overrightarrow{OP_{n+2}} = -\overrightarrow{OP_n}$ であり、 $\overrightarrow{OP_1}$ 、 $\overrightarrow{OP_2}$ の長さが 1 なら、すべての項の長さが 1 である。

以上より、すべての自然数 n に対して

$$|\overrightarrow{OP_n}| = 1$$

が成り立つ。

【総評】 難度 8、計算量 6。想定時間は 28 分程度。固有値などを使わず、2 次行列を直接計算して得る $A^2 - (a + d)A + E = 0$ が出発点である。そこからベクトル列の 2 項間漸化式と、初期ベクトル $(1, 0)$ を v_1, v_2 で表す式の 2 本を作る。 $T = 0$ を分けた後、 $T = 2(v_1 \cdot v_2)$ により「長さ 1」と「隣接内積一定」を同時に帰納するのが採点の中心で、長さだけを帰納しようとする式が閉じない。

【第 5 問】

xy 平面上で、原点を極、 x 軸の正の部分を開始とする極座標に関して、極方程式

$$r = 2 + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

により表される曲線を C とする.

C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ.

【方針】

曲線を $x = (2 + \cos \theta) \cos \theta$, $y = (2 + \cos \theta) \sin \theta$ と媒介表示する。 $dx/d\theta = -2 \sin \theta (1 + \cos \theta) \leq 0$ なので、回転体は x に垂直な円板で重複なく表せる。

$$V = \pi \int y^2 dx$$

を θ の積分へ直し、最後に $u = \cos \theta$ と置換して多項式を積分する。

【解答】

極方程式から

$$x = (2 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = (2 + \cos \theta) \sin \theta$$

である。また

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \cos \theta - (2 + \cos \theta) \sin \theta = -2 \sin \theta (1 + \cos \theta) \leq 0$$

であるから、 x は $0 \leq \theta \leq \pi$ で単調に減少する。したがって円板法により、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= -\pi \int_0^\pi y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi (2 + \cos \theta)^2 \sin^3 \theta (1 + \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

$u = \cos \theta$ とおくと $du = -\sin \theta d\theta$, $\sin^2 \theta = 1 - u^2$ であるから

$$V = 2\pi \int_{-1}^1 (2 + u)^2 (1 - u^2) (1 + u) du.$$

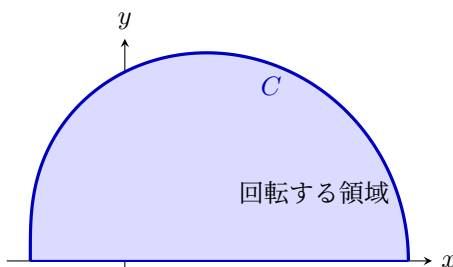
被積分関数を展開すると

$$(2 + u)^2 (1 - u^2) (1 + u) = 4 + 8u + u^2 - 7u^3 - 5u^4 - u^5.$$

奇関数の項の積分は 0 なので

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^1 (4 + u^2 - 5u^4) du \\ &= 2\pi \left(8 + \frac{2}{3} - 2 \right) \\ &= \frac{40\pi}{3}. \end{aligned}$$

【回転前の領域】



$x(\theta)$ は単調に減少するため、 x に垂直な円板で重複なく積分できる。

【総評】 難度 7、計算量 7。想定時間は 22 分程度。極座標の面積公式ではなく、回転体なのでまず直交座標の円板法

$$\pi \int y^2 dx$$

へ戻す。 $x(\theta)$ が単調減少することを確認し、積分の符号を反転するのが重要である。 $u = \cos \theta$ の後は対称区間 $[-1, 1]$ なので奇数次の項が消え、計算を半分にできる。展開前に $(1 - u^2)(1 + u)$ を保つと符号を追やすい。

【第 6 問】

a と b を互いに素な正の整数とし、さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を

$$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

をみたすように定めるとき、次を示せ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1) a_2 は奇数であり、 a_2 と b_2 は互いに素である。
- (2) すべての n に対して、 a_n は奇数であり、 a_n と b_n は互いに素である。

【方針】

(1) は $a_2 = a^2 + 2b^2$ 、 $b_2 = 2ab$ を直接使う。(2) の奇偶は $a_{n+1} = aa_n + 2bb_n$ から帰納する。互いに素でないと仮定し、共通の素数 p を取る。共役との積から $p \mid a^2 - 2b^2$ を得る。 b の逆数に相当する剰余 u を $bu \equiv a \pmod{p}$ で定めると $u^2 \equiv 2 \pmod{p}$ 。二項展開をこの合同式で整理すると、同じ式が一方では 0、他方では $(2a)^n \neq 0$ となる矛盾を導く。

【解答】

(1) 展開すると

$$a_2 = a^2 + 2b^2, \quad b_2 = 2ab$$

である。 a は奇数だから a^2 は奇数で、 $2b^2$ は偶数である。よって a_2 は奇数である。

a_2, b_2 が 1 より大きい公約数をもつと仮定し、その素因数を p とする。 a_2 は奇数なので p は奇数である。 $p \mid b_2 = 2ab$ より $p \mid a$ または $p \mid b$ である。 $p \mid a$ なら $p \mid a_2 = a^2 + 2b^2$ から $p \mid b$ となり、 $p \mid b$ なら同様に $p \mid a$ となる。いずれも a, b が互いに素であることに反する。したがって a_2, b_2 は互いに素である。

(2)

$$a_{n+1} = aa_n + 2bb_n, \quad b_{n+1} = ba_n + ab_n$$

である。 $a_1 = a$ は奇数であり、 a_n が奇数なら aa_n は奇数、 $2bb_n$ は偶数だから a_{n+1} も奇数である。数学的帰納法により、全ての n で a_n は奇数である。

次に、ある n で a_n, b_n が 1 より大きい公約数をもつと仮定し、その素因数を p とする。 a_n は奇数なので p は奇数である。共役を掛けると

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a^2 - 2b^2)^n$$

であるから $p \mid a^2 - 2b^2$ である。 p が b を割るならこの合同式から $p \mid a$ となり矛盾するので、 p は b を割らない。

そこで $bu \equiv a \pmod{p}$ を満たす整数 u をとることができる。 $a^2 \equiv 2b^2 \pmod{p}$ より

$$u^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ の二項展開で、 $\sqrt{2}$ の代わりに u を入れ、 $u^2 \equiv 2 \pmod{p}$ を用いて偶数乗と奇数乗を整理すると

$$(a + bu)^n \equiv a_n + b_n u \pmod{p}.$$

仮定より右辺は 0 である。一方 $bu \equiv a \pmod{p}$ だから左辺は

$$(a + bu)^n \equiv (2a)^n \pmod{p}.$$

$p \mid a$ なら $p \mid b$ になってしまうので p は a も割らず、 p は奇数である。したがって $(2a)^n$ は p で割り切れず、矛盾する。よって a_n, b_n は全ての n で互いに素である。

【総評】 難度 8、計算量 6。想定時間は 28 分程度。奇偶性は漸化式で直ちに帰納できるが、互いに素の証明が本体である。共通素因数 p を仮定し、共役との積で $a^2 \equiv 2b^2 \pmod{p}$ を引き出す。 $bu \equiv a$ を満たす剰余 u を導入する箇所では、 $p \nmid b$ を先に確認する必要がある。最後は二項展開を実際に同じ偶数乗・奇数乗へ分けられることを説明し、抽象的な代数を使わず矛盾まで閉じる。