

入 学 試 験 問 題

数 学



京 都 大 学 2010 年 度 理 系 (乙)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

四面体 $ABCD$ において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする。
このとき、頂点 A 、頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ。

第 2 問

x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$ 、 $B(0, 2)$ 、 $P(x, x)$ をとり、三角形 APB を考える。 x の値が変化するとき、 $\angle APB$ の最大値を求めよ。

第 3 問

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし、曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$)、曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$) および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ。

第 4 問

$1 < a < 2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}, a, b$ である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。
このとき a を用いて b を表せ。

第 5 問

- (1) n を正の整数、 $a = 2^n$ とする。 $3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。
- (2) m を正の偶数とする。 $3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ。

第 6 問

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし、どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)