

京都大学 2010 年度 理系 (乙)

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

四面体 $ABCD$ において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする。このとき、頂点 A 、頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ。

【方針】

点 A を基準に $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ 、 $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ と置く。最初の 2 つの垂直条件から $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{d}|^2$ を得る。さらに $AB \perp CD$ から両者が等しいため $|\vec{c}| = |\vec{d}|$ 。これで CD が平面内の 2 方向 AB, AM の両方に垂直であることを示す。

【解答】

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ 、 $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおく。 $\overrightarrow{CA} = -\vec{c}$ 、 $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$ だから、 $CA \perp CB$ より

$$(-\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2.$$

同様に $DA \perp DB$ より

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{d}|^2.$$

また $AB \perp CD$ であり、 $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$ だから

$$\vec{b} \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0.$$

上の 2 式を用いると

$$|\vec{d}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2.$$

一方、 M は CD の中点なので

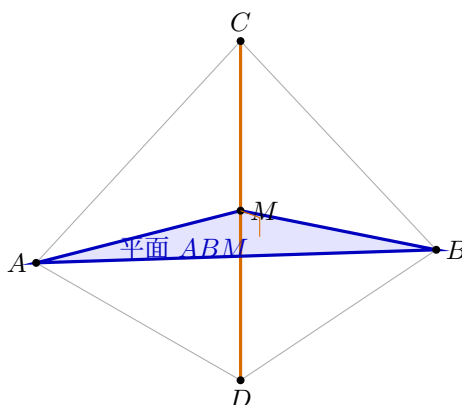
$$\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}.$$

したがって上の等式より

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(|\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2) = 0.$$

よって $CD \perp AM$ である。仮定から $CD \perp AB$ でもある。直線 AB と AM は平面 ABM 内で点 A において交わるので、 CD は平面 ABM と直交する。

【辺 CD と平面 ABM 】



M は CD の中点。 $CD \perp MA$ と $CD \perp MB$ を示せばよい。

【総評】 難度 5、計算量 3。想定時間は 10 分程度。結論を示すには、既知の $CD \perp AB$ に加えて $CD \perp AM$ を示せばよいと最初に見通すことが重要である。4 点を座標化する必要はなく、 A を基準に 3 本の位置ベクトルを置けば、3 つの垂直条件は内積の等式になる。中点条件から $\overrightarrow{AM} = (\vec{c} + \vec{d})/2$ を作り、差 $\vec{d} - \vec{c}$ との内積が長さの平方差になるところが主な採点点である。

【第 2 問】

x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0,1)$ 、 $B(0,2)$ 、 $P(x,x)$ をとり、三角形 APB を考える。 x の値が変化するとき、 $\angle APB$ の最大値を求めよ。

【方針】

$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ の内積と 2 次元の面積成分から、角 $\phi = \angle APB$ の正接を求める。内積の二次式は常に正なので $0 < \phi < \pi/2$ 。 $\tan \phi = x/(2x^2 - 3x + 2)$ の逆数を取り、相加相乗平均により $2x + 2/x \geq 4$ と評価して最大値と等号条件を同時に決める。

【解答】

$\phi = \angle APB$ とおく。

$$\overrightarrow{PA} = (-x, 1-x), \quad \overrightarrow{PB} = (-x, 2-x)$$

である。これらの内積は

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 + (1-x)(2-x) = 2x^2 - 3x + 2$$

である。この二次式の判別式は $9 - 16 < 0$ で、係数が正だから常に正である。したがって $0 < \phi < \pi/2$ である。

また 2 つのベクトルが作る平行四辺形の面積は

$$|(-x)(2-x) - (1-x)(-x)| = x$$

であるから

$$\tan \phi = \frac{x}{2x^2 - 3x + 2}.$$

ここで $x > 0$ より

$$\frac{2x^2 - 3x + 2}{x} = 2x + \frac{2}{x} - 3 \geq 4 - 3 = 1.$$

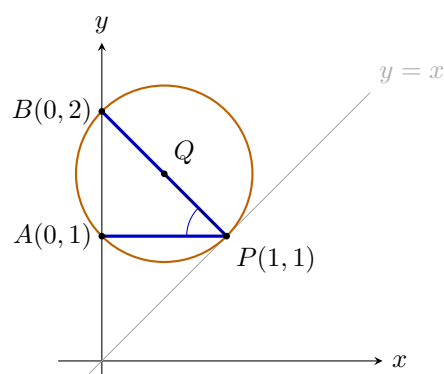
等号は $2x = 2/x$ 、すなわち $x = 1$ のときに成り立つ。よって $\tan \phi \leq 1$ であり、 $0 < \phi < \pi/2$ で正接は増加するから

$$\phi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$x = 1$ のとき等号が成り立つので、 $\angle APB$ の最大値は

$$\frac{\pi}{4}$$

である。

【弦 AB を見込む角】

最大時には A, B, P を通る円が直線 $y = x$ に $P = (1,1)$ で接する。

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 12 分程度。角そのものを余弦で最大化すると平方根が残るが、2 ベクトルの内積が常に正で角が鋭角だと確認すれば正接を使える。分子の面積成分がちょうど x になるため、 $\tan \phi = x/(2x^2 - 3x + 2)$ は簡潔である。微分でも解けるが、逆数を $2x + 2/x - 3$ として相加相乗平均を使えば等号条件 $x = 1$ まで一度に得られ、答案が短く安定する。

【第 3 問】

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし、曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$)、曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$) および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ。

【方針】

まず面積 S を定積分で求める。 T では 2 曲線の交点を α と置き、 $\tan \alpha = a$ を得る。閉領域の上端は $[0, \alpha]$ では $\sin x$ 、 $[\alpha, \pi/2]$ では $a \cos x$ なので積分を分ける。 $\sin \alpha, \cos \alpha$ を a で表し、面積比の方程式を解く。

【解答】

まず

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

である。 $0 < \alpha < \pi/2$ において 2 曲線が交わるとすると

$$\sin \alpha = a \cos \alpha, \quad \tan \alpha = a.$$

したがって

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

閉領域の上端は $0 \leq x \leq \alpha$ では $y = \sin x$ 、 $\alpha \leq x \leq \pi/2$ では $y = a \cos x$ だから

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\alpha} \sin x \, dx + \int_{\alpha}^{\pi/2} a \cos x \, dx \\ &= 1 - \cos \alpha + a(1 - \sin \alpha) \\ &= 1 + a - \sqrt{1+a^2}. \end{aligned}$$

条件 $S : T = 3 : 1$ と $S = 2$ より $T = 2/3$ である。したがって

$$1 + a - \sqrt{1+a^2} = \frac{2}{3}, \quad \sqrt{1+a^2} = a + \frac{1}{3}.$$

両辺は正なので 2 乗して

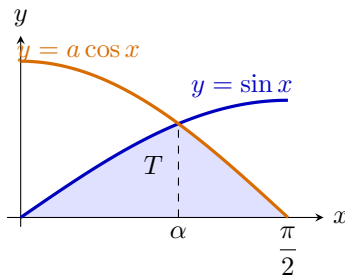
$$1 + a^2 = a^2 + \frac{2a}{3} + \frac{1}{9}$$

となる。これを解くと

$$a = \frac{4}{3}$$

である。この値は正で、もとの等式も満たす。

【面積 T の上下境界】



$0 \leq x \leq \alpha$ では $\sin x$ 、その後は $a \cos x$ が下側になる。

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 12 分程度。図形 T は 2 曲線のうち低い方と x 軸の間なので、交点の前後で積分を分けることが最大の注意点である。 $\tan \alpha = a$ から $\sin \alpha, \cos \alpha$ を直角三角形で表すと、 $T = 1 + a - \sqrt{1 + a^2}$ まで整理できる。最後に平方根を移項して 2 乗する際は右边が正であることを確認し、得られた $a = 4/3$ を元の面積式へ戻して余分な解でないことを確かめたい。

【第 4 問】

$1 < a < 2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}, a, b$ である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき a を用いて b を表せ。

【方針】

3 辺に対する角をそれぞれ置き、外接円の半径が 1 であることから拡張正弦定理を使う。辺 $\sqrt{3}$ に対する角は鋭角条件により $\pi/3$ 。辺 a に対する角を α とすると $\sin \alpha = a/2$ 、第 3 角は $2\pi/3 - \alpha$ である。正弦の差の公式と $\cos \alpha > 0$ を用いて b を求める。

【解答】

辺 $\sqrt{3}, a, b$ に対する角をそれぞれ A, B, C とする。外接円の半径が 1 であるから、拡張正弦定理より

$$\sqrt{3} = 2 \sin A, \quad a = 2 \sin B, \quad b = 2 \sin C.$$

三角形は鋭角三角形なので $0 < A < \pi/2$ である。よって $\sin A = \sqrt{3}/2$ から

$$A = \frac{\pi}{3}.$$

また $0 < B < \pi/2$ だから

$$\sin B = \frac{a}{2}, \quad \cos B = \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}.$$

角の和より $C = \pi - A - B = 2\pi/3 - B$ である。したがって

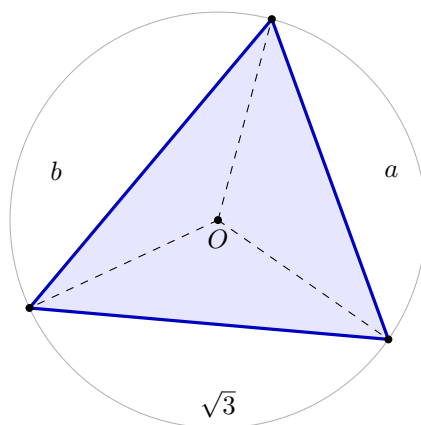
$$\begin{aligned} b &= 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - B \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{4 - a^2} + a}{2}. \end{aligned}$$

よって

$$b = \frac{a + \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$$

である。

【外接円と 3 辺】



拡張正弦定理により、各辺は対応する角の正弦の 2 倍になる。

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 10 分程度。外接円の半径が 1 なので全ての辺が対応する角の正弦の 2 倍になる。 $\sin A = \sqrt{3}/2$ には $A = 2\pi/3$ もあるが、鋭角三角形という条件で $A = \pi/3$ に絞ることが重要である。同様に $\cos B$ の符号も正と決まる。最後は第 3 角を $2\pi/3 - B$ とし、加法定理を一行ずつ適用すれば平方根の符号を誤りにくい。

【第 5 問】

- (1) n を正の整数、 $a = 2^n$ とする。 $3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。
- (2) m を正の偶数とする。 $3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ。

【方針】

(1) は $3^{2^{n+1}} - 1 = (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$ を用いる帰納法で、後者が 2 では割れるが 4 では割れないことを確認する。(2) では偶数 m を $m = 2^n q$ (q は奇数) と表す。 $3^m - 1 = (3^{2^n} - 1)(1 + 3^{2^n} + \dots + 3^{(q-1)2^n})$ の第 2 因子が奇数なので、(1) から 2 の因子の個数が正確に分かる。最後に $m \leq n + 2$ を満たす場合を絞る。

【解答】

(1) $n = 1$ のとき

$$3^2 - 1 = 8$$

であり、 2^3 で割り切れるが 2^4 では割り切れない。

ある正の整数 n について

$$3^{2^n} - 1 = 2^{n+2}q$$

と書け、 q が奇数であると仮定する。 3^{2^n} は 4 で割ると 1 余るので、 $3^{2^n} + 1$ は 2 で割り切れるが 4 では割り切れない。したがって、ある奇数 q' を用いて

$$3^{2^n} + 1 = 2q'$$

と書ける。よって

$$3^{2^{n+1}} - 1 = (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1) = 2^{n+3}qq'$$

であり、 2^{n+3} で割り切れるが 2^{n+4} では割り切れない。数学的帰納法により、全ての正の整数 n について題意が成り立つ。

(2) m は正の偶数だから

$$m = 2^n q$$

と書ける。ただし $n \geq 1$ 、 q は正の奇数である。 $A = 3^{2^n}$ とおくと

$$3^m - 1 = A^q - 1 = (A - 1)(1 + A + A^2 + \dots + A^{q-1}).$$

第 2 因子は奇数を q 個加えた数なので奇数である。(1) より $A - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。したがって $3^m - 1$ も 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。

仮定より 2^m が $3^m - 1$ を割り切るので

$$m \leq n + 2.$$

一方 $m = 2^n q \geq 2^n$ だから $2^n \leq n+2$ である。 $n=3$ では $2^3 > 3+2$ であり、 $2^n > n+2$ なら $2^{n+1} > 2(n+2) > n+3$ なので、数学的帰納法により $n \geq 3$ では $2^n > n+2$ である。したがって、 $n=1$ または $n=2$ だけを調べればよい。

$n=1$ のとき $2q = m \leq 3$ かつ q は正の奇数なので $q=1$ 、 $m=2$ である。 $n=2$ のとき $4q = m \leq 4$ より $q=1$ 、 $m=4$ である。したがって $m=2$ または $m=4$ である。

【総評】 難度 7、計算量 5。想定時間は 20 分程度。(1) では「割り切れる」だけでなく次の 2 の累乗では割れないことを保つ必要があり、 $3^{2^n} + 1$ が 2 では割れるが 4 では割れないという確認が核心。(2) は m から 2 の因子を全て取り出して奇数 q を残す。等比数列型の第 2 因子が奇数であるため、 $3^m - 1$ に含まれる 2 の因子は (1) と同じになる。最後は $m = 2^n q \geq 2^n$ と $m \leq n+2$ を組み合わせ、 q まで絞る。

【第 6 問】

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし、どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

【方針】

全てのボールを区別して考える。全事象は $(2n)^n$ 通り、全て異なる箱に入る場合は ${}_{2n}P_n$ 通りである。確率を $(n+1)/(2n), (n+2)/(2n), \dots, 1$ の積として書き、対数を取って和へ変える。 $1/n$ を刻み幅とする区分求積法で極限を定積分へ移し、その値を計算する。

【解答】

各ボールの入る箱は $2n$ 通りで、ボールごとに独立に選ぶから、全ての入れ方は $(2n)^n$ 通りである。どの箱にも 1 個以下しか入らないためには、 n 個のボールが全て異なる箱に入ればよい。その入れ方は

$${}_{2n}P_n = (2n)(2n-1) \cdots (n+1)$$

通りである。したがって

$$p_n = \frac{(2n)(2n-1) \cdots (n+1)}{(2n)^n}.$$

因子の順序を逆にして対数を取ると

$$\begin{aligned} \frac{\log p_n}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{n+k}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{1+k/n}{2} \right). \end{aligned}$$

右辺は関数 $\log\{(1+x)/2\}$ の区間 $[0, 1]$ における区分求積和である。よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n} &= \int_0^1 \log \left(\frac{1+x}{2} \right) dx \\ &= \left[(1+x) \log \left(\frac{1+x}{2} \right) - (1+x) \right]_0^1 \\ &= \log 2 - 1. \end{aligned}$$

したがって求める極限值は $\log 2 - 1$ である。

【総評】 難度 7、計算量 5。想定時間は 18 分程度。確率そのものは、ボールを順に異なる箱へ入れる確率としても求められるが、 ${}_{2n}P_n/(2n)^n$ と書くと対数処理が見えやすい。大型の積記号を使わず、因子を明示してから対数で有限和へ直す。区分求積法では $(n+k)/(2n) = (1+k/n)/2$ と整理し、積分区間が $[0, 1]$ になることを確認する。原始関数の下端で $\log(1/2) = -\log 2$ の符号を誤らないようにしたい。